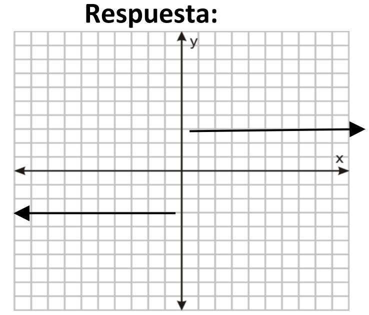
Módulo 15
Cálculo de Fenómenos Naturales y Procesos Sociales

Conocimientos Previos: Funciones.

Sugerimos dar un repaso al tema **Funciones** que ya se ha estudiado en módulos anteriores, por ser un antecedente indispensable para el abordaje de los temas que se aprenderán en el presente módulo 15 “Cálculo en Fenómenos Naturales y Procesos Sociales”. **Recuerda que si dos variables “x” y “y” están relacionadas de tal modo que para cada valor admisible de x, le corresponde uno o más valores de y, se dice que y es una función de x.** A continuación se presentan algunos problemas sobre funciones que te orientarán sobre el contenido que se debe repasar de dicho tema.

1.- Encuentra el valor de “x” donde la función In(2x-3)=0 cruza al eje x. **Respuesta: 2**	2.- El costo mensual C, en pesos, para llamadas locales en cierta compañía de teléfonos celulares está dado por la función C(x)= 0.25x + 10, donde x es el número de minutos usados. Si dispones de $ 47. ¿Cuántas horas puedes usar el celular? **Respuesta: 2.47 horas**
3.- Si el lado de un terreno triangular mide una cuarta parte del perímetro, el segundo lado mide 7 metros y el tercer lado mide dos terceras partes del perímetro. ¿Cuál es el valor de dicho perímetro? **Respuesta: 84 m**	4.- Considerando las funciones f(x) y g(x), identifica la opción donde se representa correctamente el resultado de la siguiente expresión: (f-g) (x) a) f(x) / g(x) b) f(x) + g(x) c) f(x) - g(x) d) f(x) . g(x) **Respuesta: c) f(x) - g(x)**
5.- Vuelve explícita la siguiente función implícita 2xy – x + y = 1, considerando a x como variable independiente y evalúala para x=2 **Respuesta: y=(1+x) / (2x+1) y = 0.6**	6.- Encuentra el valor de f(2), en la función $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ **Respuesta: 18**
7.- Resuelve la función: $e^{4x-8} = 1$ y encuentra el valor de x. **Respuesta: 2**	8.- Determina el dominio y el contradominio de la función $y = x^2$ **Respuesta: Dominio (-∞, +∞) Contradominio (0, +∞)**
9.- Obtén el valor de f [g(y)] tomando en cuenta los datos donde las funciones son: $f(y)= y^2+y+1$ $g(y)=y+1$ **Respuesta: y^2+3y+3**	10.- ¿Cuál es la gráfica de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} -3 \text{ si } x < 0 \\ 3 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ **Respuesta:** 

Parte 1: Limites

Concepto de Límite.

Si tenemos la función:

$f(x) = \frac{16-x^2}{x+4}$ para todo x € R excepto x = -4 porque para $f(-4) = \frac{16-(-4)^2}{-4+4} = \frac{0}{0}$ (No definida)

¿Qué tan cercano se puede estar a -4, de tal manera que la función siga estando definida?

Veamos valores cercanos a -4 por la derecha . Y los valores cercanos a -4 por la izquierda?

x	f(x)
-3.9	7.9
-3.99	7.99
-3.999	7.999
-3.9999	7.9999

…

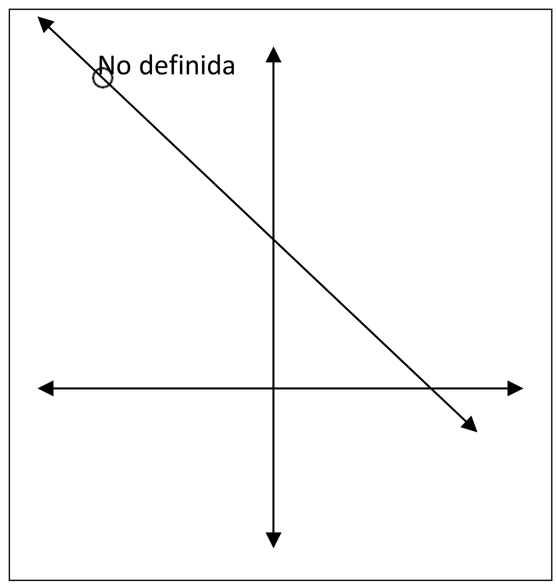
Mientras x tiende a -4
f(x) tiende a 8.

X	f(x)
-4.1	8.1
-4.11	8.01
-4.111	8.001
-4.1111	8.0001

…

Mientras x tiende a -4
f(x) tiende a 8.

Por lo tanto, se puede afirmar que: $\lim_{x \to -4} f(x) = 8$.



Formalización.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ **(límite por la izquierda)**

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ **(límite por la derecha)**

Si $L_1 = L_2$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y Sí Existe

Un límite existe cuando es el mismo valor la tendencia por la izquierda que por la derecha y por lo tanto no existe si es un valor diferente.

Y si ocurre que $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$ entonces el $\lim_{x \to a} f(x)$ No existe

Propiedades de los límites.

Si "a" es un número real y "n" un entero positivo entonces $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} x^2 = \lim (3)^2 = 9$

Si f(x) =c donde "c" es una constante y "a" un número real entonces $\lim_{x \to a} c = c$

Ejemplo 1: $\lim_{x \to 5} 2 = 2$

Ejemplo 2: $\lim_{x \to 10} 2 = 2$

Si "k " es una constante y existe el límite de una función f(x) cuando x tiende a un número real "a" entonces $\lim_{x \to a} k(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$

Ejemplo 1: $\lim_{x \to 3} 7x = 7 \lim_{x \to 3} x = 7(3) = 21$

Ejemplo 2: $\lim_{x \to 1/4} 8x^3 = 8 \lim_{x \to 1/4} x = 8\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 8\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

Si f(x) es un polinomio y "a" es un número real entonces $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} (x^3 - 5x^2 + 4x - 7) = 3^3 - 5(3)^2 + 4(3) - 7 = 27 - 45 + 12 - 7 = -13$

Si "n" es un entero positivo y "a" es un número real entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

Nota: Si "n" es un número par y además f(x) > 0.

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} \sqrt{7x - 5} = \sqrt{\lim_{x \to 3} 7(x) - 5} = \sqrt{7(3) - 5} = \sqrt{16} = 4$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ **y** $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ **entonces:**

i) $\lim [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

Ejemplo: $\lim_{x \to 4} (x^2 + \sqrt{x}) = \lim_{x \to 4} x^2 + \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 4^2 + \sqrt{4} = 16 + 2 = 18$

ii) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

Ejemplo: $\lim_{x \to 10}(4x - 7) = \lim_{x \to 10} 4x - \lim_{x \to 10} 7 = 4(10) - 7 = 40 - 7 = 33$

iii) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

Ejemplo: $\lim_{x \to 2} (2x) \sqrt{5x-1}\,) = \lim_{x \to 2} 2x * \lim_{x \to 2} \sqrt{5x-1}$

$= 2\,(2) * \sqrt{5(2)-1}$

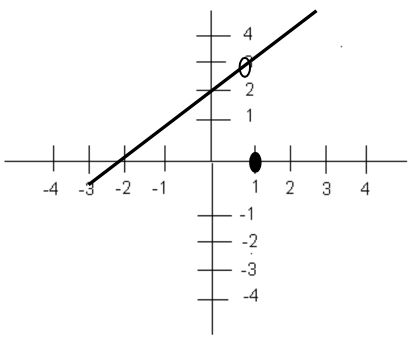
$= 4 * \sqrt{9}$

$= 4 * 3$

$= 12$

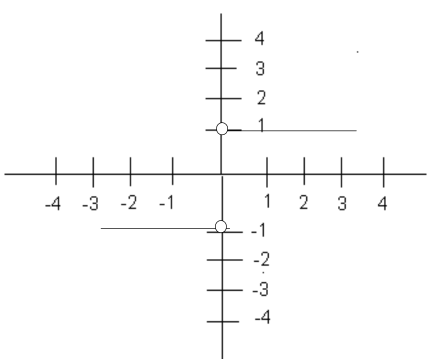
Problemas

11.- Con ayuda de tu gráfica encuentra $\lim_{x \to 1} f(x)$



Respuesta: 3

12.- De acuerdo a los datos mostrados en la gráfica, encuentra la función f(x).



Respuesta:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \text{indeterminado} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -3 & \text{si } 1 < 1 \\ 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } 1 < 1 \end{cases}$

13.- ¿Cuál es el resultado del siguiente límite?

$\lim_{x \to 9} (5 + x^2)$

Respuesta: 86

14.- Si se tienen las funciones continuas f(x) =X+4 y g(x)=x+1 encuentra el siguiente límite para x=2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Respuesta: 2

15.- A continuación se te presentan las funciones continuas… f(x) = 2x+3 y g (x) = x +1
Tómalas en cuenta y encuentra el límite de $\lim_{x \to 1} [\, f(x) + g(x) \,]$… cuando x=1 si es que existe.

Respuesta: sí existe y es 7.

16.- Determina el $\lim_{x \to 5^+} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$

Respuesta: $\frac{1}{10}$

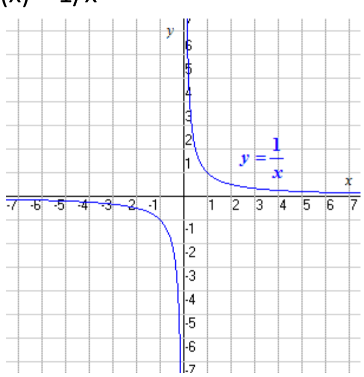
17.- ¿Cuánto vale el límite que se te presenta? Indica las operaciones?

$$\lim_{x \to 0} (x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$$

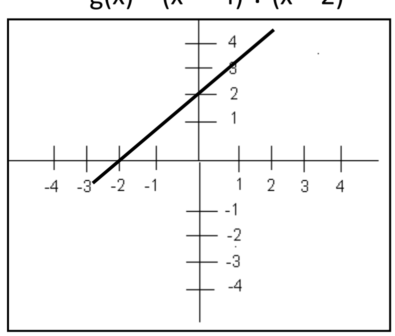
Respuesta: -3

18.- Observa cada una de las gráficas dadas y determina en cuáles de ellas se cumple que el límite cuando x tiende a cero existe.

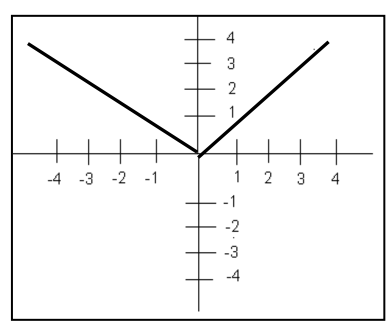
f(x) = 1/x



g(x) = (x² – 4) ÷ (x – 2)



h(x) = |x|



Respuesta: 2 y 3

19.- Se sabe que…
f(x) = L, si x= a, donde L € R.

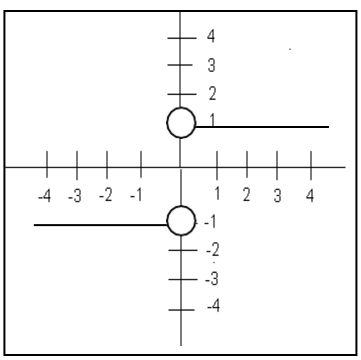
Considera las siguientes afirmaciones y clasifícalas como verdaderas o falsas.

Límites	F o V	¿Por qué?
$\lim_{x\to a} f(x)$ = no existe si L = 0	F	
$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \forall$ x, L	V	
$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = L^n$	V	
$\lim_{x\to e} f(x)$ = no existe si L = 1 / (x – e)	V	

20.- ¿Cuál es el límite de la función f(x) = 4 cuando x→0?

Respuesta: 4

21.- Usa la gráfica para hallar **el límite de** $\mathbf{f(x) = \frac{/x/}{x}}$ cuando x tiende a cero por la izquierda.



Respuesta: -1

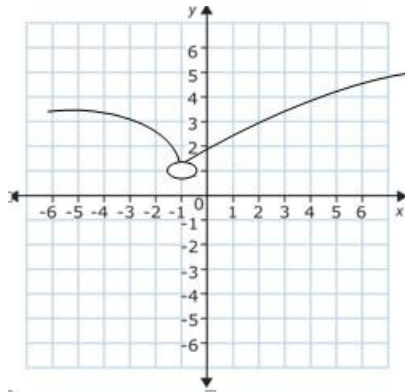
22.- ¿Cuál es el valor del siguiente límite?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 - 3x^6 + 2x^5}{x^4}$$

Respuesta: 0

23.- ¿Qué debe hacerse si un par de amigos tuyos comienzan a discutir acerca de cómo pueden aplicar los límites en un análisis demográfico y te das cuenta de que ambos lo hacen de manera errónea? R= **Pruebas nuevas formas de intentar resolver el conflicto, convenciéndolos de un cambio de postura.**

24.- La siguiente función es discontinua en $x = -1$. ¿Existe el límite cuando x tiende a cero en la función dada? Si la respuesta es afirmativa, calcula su valor.



Respuesta: Sí existe. El límite es 1.

25.- La $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es una función polinomial. Encuentra su límite y determina si es continua para $x=2$ **Respuesta: El** límite **es 9 y sí es continua.**	26.- ¿Cuál es el resultado de calcular este límite? $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+x}{x}$ **Respuesta: 1**

Límites de una Función Racional.

Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde p(x) y q(x) son polinomios con $\lim p(x) = L_1$ y $\lim q(x) = L_2$ entonces se pueden presentar los siguientes casos:

CASO 1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ **siempre y cuando $L_2 \neq 0$**

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-10}{x-3} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 4} (x^2-10)}{\lim\limits_{x\to 4} (x-3)} = \frac{4^2-10}{4-3} = \frac{6}{1} = 6$

CASO 2. Si $\lim\limits_{x\to a} p(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} q(x) = 0$ esto significa que son divisibles por (x-a) y entonces si queremos hallar $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ se presentan dos subcasos:

Primero: Que el factor (x-a) aparezca en el denominador con un exponente menor o igual que en el numerador. En tal caso decimos que el $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$

SÍ EXISTE y se afirma que en x=a hay UNA DISCONTINUIDAD EVITABLE O REMOVIBLE.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x-8}{x^2-7x+12} = \frac{2(4)-8}{4^2-7(4)+12} = \frac{0}{0}$ entonces se factoriza quedando:

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{2(x-4)}{(x-3)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{2}{x-3} = \frac{2}{4-3} = \frac{2}{1} = 2$

Por lo tanto, en este caso se afirma que el límite existe, es 2 y hay en x=4 una discontinuidad evitable o removible.

Segundo: Que el factor (x-a) aparezca en el denominador con exponente mayor que en el numerador. En tal caso decimos que el $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$

NO EXISTE y se afirma que, en tal caso, LA DISCONTINUIDAD ES INEVITABLE.

CASO 3. Si se pretende encontrar el $\lim_{x\to a} f(x)$ donde $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y se sabe que si x=a resulta que $p(a) \neq 0$ y $q(a) = 0$, entonces "a" es un polo de la función f(x) y por lo tanto, DICHO LÍMITE NO EXISTE.

Ejemplo: Sea $f(x) = \frac{1}{x-4}$ aquí se observa que x= 4 es un polo de la función. Veamos qué sucede en f (x) si x tiende a 4 tanto por la derecha como por la izquierda:

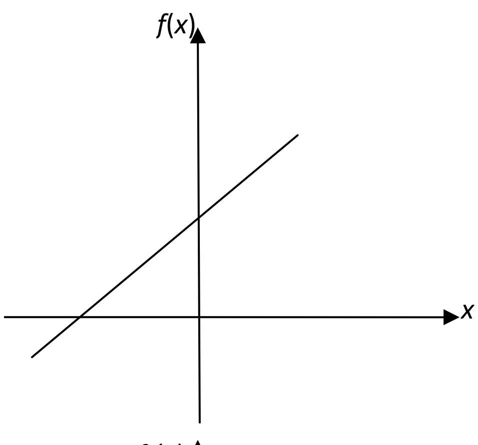
x	f(x)
3.9	-10
3.99	-100
3.999	-1000
3.9999	-10000
4.1	10
4.01	100
4.001	1000
4.0001	10000

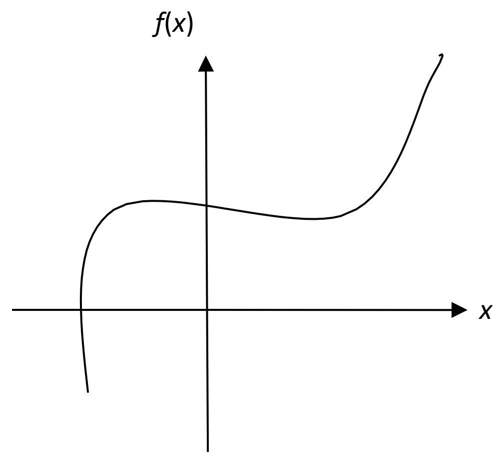
De la tabulación anterior podemos deducir lo siguiente: Cuando x se acerca a 4 por la derecha f(x) se hace cada vez más grande, es decir, que f(x) tiende a más infinito. Asimismo cuando x se acerca a 4 por la izquierda f(x) se hace cada vez más pequeño, es decir, tiende a menos infinito. Por lo tanto se puede afirmar que:

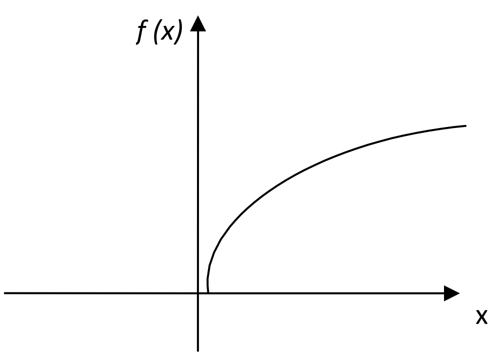
$\lim_{x\to 4} \frac{1}{x-4}$ NO EXISTE

Continuidad de Funciones.

Una función es continua en un intervalo si su gráfica no tiene interrupciones o no tiene rupturas para cualquier número que esté en dicho intervalo. Intuitivamente podemos decir que sus líneas o curvas pueden dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Ejemplos:



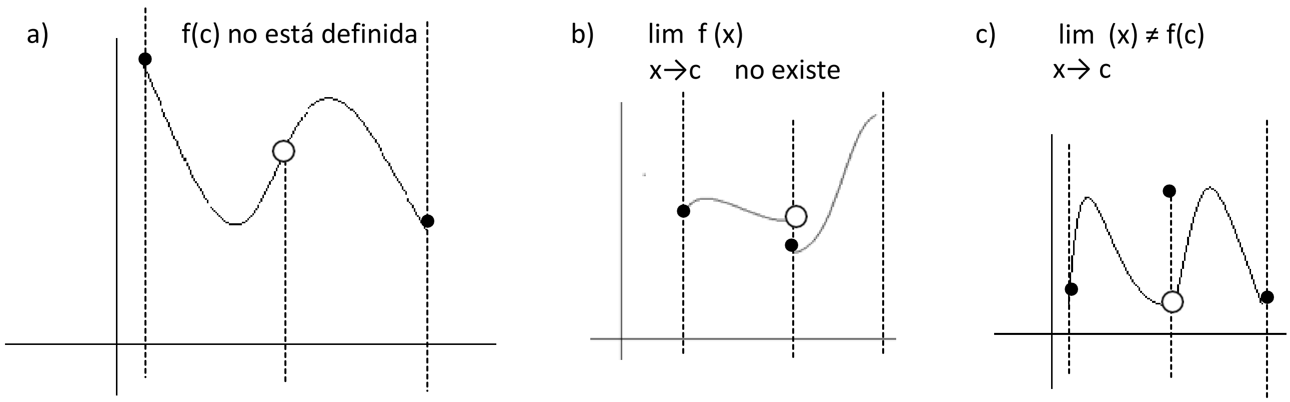




Se dice que una función es continua en x=a si cumple con todas las siguientes condiciones:

1) f(a) está definida.
2) el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.
3) el $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

En caso de que una o más de las condiciones anteriores no se cumplan, la función es discontinua en el punto a.



En el inciso a) hay discontinuidad evitable porque f(c) no está definida.
En el inciso b) hay una discontinuidad inevitable porque el $\lim_{x\to c} f(c)$ no existe.
y en el inciso c) hay una discontinuidad evitable porque el $\lim_{x\to c} f(c) \neq f(c)$

Si una función es continua en cada punto del intervalo abierto (a,b) decimos que es continua sobre ese intervalo y en caso de que una función f(x) esté definida en un intervalo cerrado [a,b] entonces dicha función es continua sobre ese intervalo si es continua en el intervalo abierto (a,b) y además se cumplen las siguientes condiciones:
que el $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ y el $\lim_{x\to b-} f(x) = b$
es decir que, si la función es continua desde la derecha en a y es continua desde la izquierda en b.

Ejemplo de continuidad.

$$g(t) = \frac{4t - 5}{t^2 + 1}$$

g(t) es CONTINUA para todos los Reales ya que $t^2 + 1$ siempre será un número positivo para cualquier valor de t y NO se anula para ninguna t Real.

Ejemplo de discontinuidad.

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2 + 2x - 35}$$

Factoricemos el denominador para ver qué valores lo anulan.

$$f(x) = \frac{x-5}{(x+7)(x-5)}$$

Aquí podemos ver que los valores x= -7 y x=5 anulan el denominador de f(x), por lo tanto para dichos valores la función NO ESTÁ DEFINIDA.

Pero observamos que en x= 5 hay UNA DISCONTINUIDAD EVITABLE O REMOVIBLE ya que:

$$f(x) = \frac{x-5}{(x+7)(x-5)} \qquad f(x) = \frac{1}{x+7} \qquad f(5) = \frac{1}{5+7} = \frac{1}{12}$$

En cambio en x= -7 LA DISCONTINUIDAD ES INEVITABLE.

Problemas.

27.- ¿Cómo actúas cuando platicas con alguien acerca de las implicaciones y avances que ha generado el uso de los programas de computación para poder graficar las funciones trigonométricas de manera más rápida y en mejor presentación?

Respuesta: Expresas tus opiniones y respetas las de los demás aun cuando no coincidan.

28.- Analiza la opción que completa el siguiente enunciado: "Puede f ser una función definida en un intervalo cerrado [a,b], por lo tanto la función f será continua en [a,b], si también lo es en (a,b) y además si se cumplen las condiciones.___________y_________

Respuesta: $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ **y** $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

29.- ¿Cuáles acciones son las más adecuadas para poder comprender el tema de continuidad si tienes dudas?

- ✓ Buscar al asesor para pedirle nuevamente que te explique el tema.
- ✓ Pides ayuda a alguna persona que tenga mayor conocimiento del tema.
- ✓ Revisas tus apuntes o buscas en libros o en internet para tratar de entenderlo.

Y la menos adecuada:

- ✓ Pasas a otro tema y esperas una oportunidad para aclarar tus dudas.

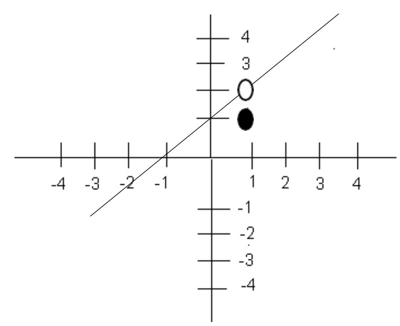
30.- ¿Cuáles de las siguientes son las condiciones que debe tener una función f para que sea continua en un número a?

1. f(a) existe
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
4. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Respuesta: 1, 2 y 4

31.- Localiza el valor de x en el que $\mathbf{f(x)} = \frac{x-3}{x^2-9}$ no es continua.

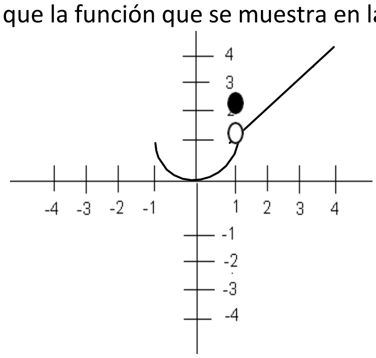
Respuesta: x= -3



32.- Identifica el punto de discontinuidad de la función que se muestra en la gráfica.

Respuesta: 1

33.- Identifica la condición de continuidad que no se cumple para que la función que se muestra en la gráfica sea continua.



Respuesta: No se cumple la tercera condición que dice que el lim f(x) = f(c)

34.- ¿Cuál de las siguientes funciones es continua para x=3?

A) g(x) = x-3

B) $k(x) = \frac{1}{x-3}$

C) $f(x) = \frac{x+3}{X^2-9}$

D) $h(x) = \frac{(x-3)^2}{x-3}$

Respuesta: g(x) = x-3

35.- Indica las condiciones que se deben cumplir para que la función $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ sea continua en el intervalo [-2,2]

Respuesta: 0,0 es continua

PARTE 2. LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES.

El concepto de la función matemática nos permite representar mediante una gráfica el comportamiento tanto cualitativo como cuantitativo de los diversos fenómenos naturales y procesos sociales. Precisamente los conceptos de límite y de derivada de una función se deducen a partir del análisis de dichos comportamientos y cambios intrínsecos en la naturaleza. De la misma forma dichos conceptos permiten ampliar el horizonte de problemas o situaciones que se pueden abordar mediante la herramienta matemática y con el objetivo de entender mejor nuestro entorno.

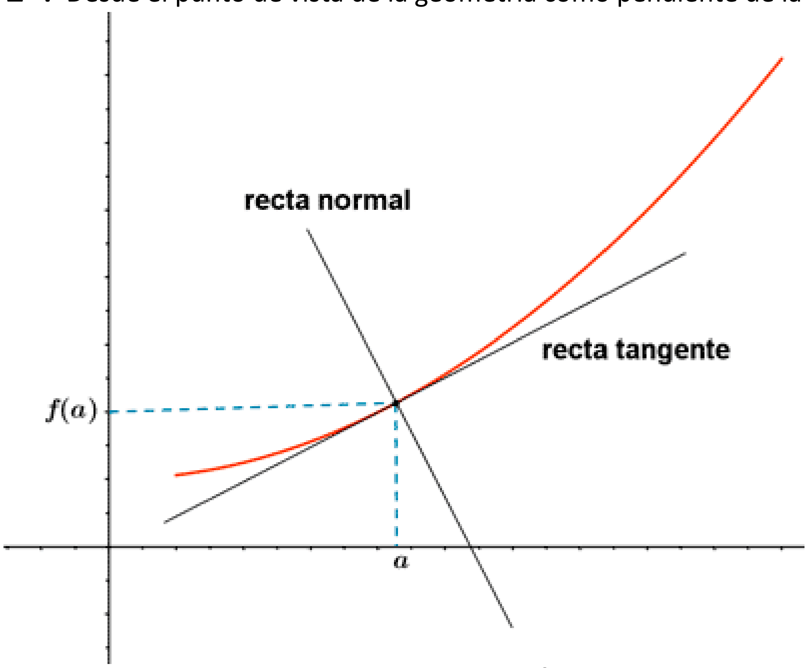
El problema de la construcción de rectas tangentes a curvas arbitrarias está íntimamente relacionado con el problema de la determinación de la velocidad instantánea de un móvil y fue Newton quien se encargó de establecer dicha relación.

Si el problema consiste en determinar la recta tangente a una curva arbitraria, entonces, se debe centrar en la determinación de la pendiente o inclinación de la recta en un punto dado de la curva. Lo anterior dio origen a la DERIVADA DE UNA FUNCIÓN, la cual, tiene los siguientes diferentes símbolos o denotaciones:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad f'(x) \qquad \frac{df}{dx} \qquad D_x f$$

La derivada de una función es una de las herramientas más poderosas en las matemáticas y en las ciencias aplicadas. La definición de derivada se puede abordar de dos formas diferentes:

1ª. Desde el punto de vista de la geometría como pendiente de la recta tangente a una curva.



Es decir que, LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN de manera geométrica, representa la pendiente de la recta que es tangente a la curva de dicha función en cierto punto.

$$m_{tan} = f'(x)$$

Si se sabe que f es una función definida en un intervalo abierto que contiene a **a,** entonces la pendiente **m** de la recta tangente a la gráfica de f en el punto **P[a, f(a)]** está dada por $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

2ª. Desde el punto de vista de la física la derivada representa una razón de cambio, es decir, **LA DERIVADA se puede ver como la velocidad instantánea de cualquier partícula en movimiento a lo largo de la gráfica de la función.**

$$V_{instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t + \Delta t) - dt}{\Delta t} = d'(t)$$

Razón de Cambio

Si el valor de la variable independiente de una función f(x), cambia desde x_1 hasta x_2, entonces al aumento o disminución que experimenta dicha variable se le llama incremento de x que se denota por el símbolo Δx y se calcula por $\Delta x = x_2 - x_1$ donde $x_2 = \Delta x + x_1$

Como consecuencia de esto, la función f(x) también experimenta un aumento o disminución en su valor al cual se le llama incremento de f(x) y se denota por el símbolo Δy y se calcula por $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

La palabra incremento la usamos para referirnos lo mismo al aumento que a una disminución.

Al cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ recibe el nombre de razón de cambio promedio de f(x) con respecto a x.

Ejemplo:
Dada la función f(x) = 4x – 7, encuentra:

a) El incremento de la función Δy en el intervalo desde x = 5 hasta x = 8.
Solución:

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

$\Delta y = f(8) - f(5)$

$\Delta y = [4(8) - 7] - [4(5) - 7]$

$\Delta y = (32 - 7) - (20 - 7)$

$\Delta y = 25 - 13$

$\Delta y = 12$

b) El incremento de la función Δy en el intervalo desde x hasta x + Δx
Solución:

$\Delta y = \mathbf{f(x +} \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = 4(x + \Delta x) - 7\ (4x - 7)$

$\Delta y = 4x + 4\Delta x - 7 - 4x + 7$

$\Delta y = 4\Delta x$

c) La razón de cambio promedio en el intervalo desde x hasta x + Δx
Solución

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\Delta x}{\Delta x}$, luego

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$

Problemas de Razón de cambio.

36.- ¿Cómo se representa la tasa de variación instantánea de "y" por unidad de variación de "x" en y = y (x)? **Respuesta:** $\frac{dy}{dx}$	37.- Si $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 2.5101$, ¿cuánto vale Δx? (incremento de x) **Respuesta: 0.0101**
38.- Si $y = x^2 - 4$ ¿cuánto vale Δy cuando x varia de 1 a 1.1? **Respuesta: 0.21**	39.- ¿En cuál de los siguientes intervalos es decreciente la función de posición al tiempo "t" dada por $s(t) = 0.05t^2 + t$? **Respuesta: (10,20)**
40.- Si $y = x^2$, calcula "Δy" cuando "x" cambia de 3 a 3.01 **Respuesta: 0.06**	41.- ¿Cuál es el Δy, si $y = 3x$ y "x" varía de 0 a 0.01? **Respuesta: 0.03**
42.- ¿Qué haces cuando alguien está hablando de funciones y derivadas y se equivoca en tu presencia? **Respuesta: Si sabes la respuesta lo corriges.**	43.- ¿Cómo realizas una crítica al tema de las diferenciales? **Respuesta: Analizas el tema y emites tu opinión, sustentando con tus propios argumentos y los de otros autores.**

La Recta Tangente a la Gráfica de una Función.

A continuación se detallan los pasos para resolver los problemas en los que se pide encontrar la pendiente de la recta que es tangente a una función dada, o bien la ecuación de dicha recta.

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + 1$ y que pasa por el punto (-1,2).

1º. Comprobar que el punto (-1,2) está en la gráfica de f(x)

$f(x) = x^2 + 1$

$f(-1) = (-1)^2 + 1$

$f(-1) = 2$ el punto (-1,2) está en la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$

2º.- Derivamos f(x) y en la derivada evaluamos el valor de x de la pareja (x,y). Lo que resulta de esto es la pendiente de la recta tangente.

$f'(x) = 2x$

$f'(-1) = 2(-1)$

$f'(-1) = -2$ **La pendiente m= -2**

3º.- Ya conociendo la pendiente, con el punto dado y con la fórmula de la Ecuación de la Línea Recta podemos obtener la ecuación de la recta que es tangente a la función y que pasa por el punto dado.

Si m= -2 con el punto (-1,2) tenemos:

$y - y_1 = m (x - x_1)$

$y – 2 = -2[x-(-1)]$

$y – 2 = -2(x + 1)$

$y – 2 = -2x – 2$

$y = -2x -2 + 2$

$y = -2x$

Por lo tanto **la ecuación de la recta que es tangente a $f(x) = x^2 + 1$ y que pasa por el punto (-1,2)** ***<u>es y= -2x.</u>***

Ejemplo 2: Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación de la función $f(x) = 2x^2 -5x -3$ en el punto (2,-5)

1º. $f(x) = 2x^2 -5x -3$

$f(2) = 2(2)^2 -5(2) -3$

$f(2) = 8 -10 -3$

$f(2) = -5$ El punto (2,-5) está en la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 -5x -3$

2º.- $f'(x) = 4x -5$

$f'(2) = 4(2) -5$

$f'(2) = 3$ **La pendiente m= 3**

3º.- Usando los valores de la pendiente m=3 y el punto (2,-5) en la Fórmula de la Ecuación de la Línea Recta: $y - y_1 = m (x - x_1)$

$y – (-5) = 3(x-2)$

$y +5 = 3x - 6$

$y = 3x -6 -5$

$y = 3x -11$

Por lo tanto **la ecuación de la recta que es tangente a $f(x) = 2x^2 -5x -3$ y que pasa por el punto (-2, 5)** ***<u>es y= 3x - 11</u>***

Problemas de Pendiente de la Recta.

44.- Identifica el **valor** de la pendiente de la recta que es tangente a la función $f(x) = x^2$ que pasa por el punto (2,4) **Respuesta: 2**	45.- Determina cual es la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + 2$, que tiene una pendiente m=2 en el punto (1,3) **Respuesta: y-2x-1=0**
46.- Un productor de lapiceros sabe que el costo total de la manufactura de 100 de ellos es de \$850, mientras que el costo total de la manufactura de 200 unidades es de \$1150. Si la relación entre el costo y el número de lapiceros fabricados es lineal. ¿Cuál es el costo total de la producción de 150 lapiceros? **Respuesta: 1000**	47.- Encuentra la pendiente de la recta que es tangente a la función $f(x)\ x^2 + 1$ que pasa por el punto (-1,2). **Respuesta: -2**
48.- ¿A qué es igual la derivada de una función f(x) evaluada en el punto “a”, de una recta que es tangente a la función f(x) en el punto (a,b)? **Respuesta: A la pendiente de la recta.**	49.- Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = (x^2 – 3)^3$ en el punto (2,1) **Respuesta: 12x – y - 23 = 0**

50.- ¿Cuál es el punto P[2,f(2)] donde existe una recta tangente a la función
$f(x) = x^2 + 2x + 3$?

Respuesta: P(2,11)

51.—Encuentra el punto P [1/2, f(1/2)] donde existe una recta tangente a la función: $f(x) = 2x^2 + 3x$

Respuesta: P(1/2 ,2)

52.- Localiza la pendiente de f(x) = 2x – 5 en el punto (2,-1)

Respuesta: 2

53.- Completa la siguiente oración: *Si se sabe que f es una función definida en un intervalo abierto que contiene a "**a**", entonces la pendiente "**m**" de la recta tangente a la gráfica de "**f**" en el punto **P[a,f(a)]** está dada por____________________, siempre y cuando este límite exista.*

Respuesta: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

54.- Si m(x) es la pendiente de la recta tangente a la curva $y=x^3 + x^2 + 1$ ¿cuál es la tasa de variación instantánea de la pendiente m con respecto a "x", y su valor para el punto (1,2)?

Respuesta: y'' =6x+2
y'' = 8

55.- Las siguientes acciones se consideran adecuadas para realizar el marco teórico de una investigación acerca del uso de las derivadas en el estudio de los fenómenos meteorológicos de la zona del Golfo de México.

Respuesta:
1.- Citar a los autores cuando haga una investigación.
2.- Parafrasear citas o textos para integrarlos a mi investigación.
3.- Revisar publicaciones técnicas.

Teoremas Básicos de Derivación.

1.- Si $f(x) = K$ donde K es una constante, entonces $f'(x) = 0$

Ejemplo 1: $f(x) = 3$
$f'(x) = 0$

Ejemplo 2: $f(x) = 8$
$f'(x) = 0$

2.- Si $f(x) = x^n$ donde n es racional, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

Ejemplo 1: $y = x^5$
$y' = 5x^4$

Ejemplo 2: $y = x^{-3}$
$y' = -3x^{-4}$

3.- $Dx\,[k\,f(x)] = k\,Dx\,f(x)$

Ejemplo: $y = 6x^3$
$y' = Dx\,(6x^3)$
$y' = 6\,Dx\,(x^3)$
$y' = (6)\,(3x^2)$
$y' = 18x^2$

4.- $Dx\,[f_1(x) + f_2(x) + \ldots] = Dx\,f_1(x) + Dx\,f_2(x) \ldots$

Ejemplo 1: $y = 4x^2 - x + 6$
$y' = Dx\,(4x^2 - x + 6)$
$y' = Dx\,(4x^2) + Dx\,(-x) + Dx\,(6)$
$y' = 4\,Dx\,(x^2) - Dx\,(x) + Dx\,(6)$
$y' = (4)\,(2x) - 1 + 0$
$y' = 8x - 1$

Ejemplo 2: $y = 2x^3 + x^2$
$y' = 6x^2 + 2x$

5.- Derivada de un producto.

Sean f(x) y g(x) funciones definidas en un cierto intervalo, entonces:

$Dx\,[f(x)\,g(x)] = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$

Ejemplo: Hallar la derivada de $y = (x^2 - 3)\,(x^3 + 6)$
$y' = (x^2 - 3)\,Dx\,(x^3 + 6) + (x^3 + 6)\,Dx\,(x^2 - 3)$
$y' = (x^2 - 3)(3x^2) + (x^3 + 6)\,(2x)$
$y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 + 12x$
$y' = 5x^4 - 9x^2 + 12x$

6.- Derivada de un cociente.

Sean f(x) y g(x) funciones definidas en un cierto intervalo, entonces:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{donde } g(x) \neq 0$$

$$y' = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo: Hallar la derivada de $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 5}$

$$y' = \frac{(x^2 + 5)\,Dx\,(x^2) - x^2\,Dx\,(x^2 + 5)}{(x^2 + 5)^2}$$

$$y' = \frac{(x^2 + 5)\,(2x) - (x^2)\,(2x)}{(x^2 + 5)^2}$$

$$y' = \frac{2x^3 + 10x - 2x^3}{(x^2 + 5)^2} = \frac{10x}{(x^2 + 5)^2}$$

7.- Regla de la Cadena. Cuando se aplica ésta es útil pensar que la función compuesta tiene dos partes (una interior y una exterior).

y = f [g(x)] y se puede abreviar como **f(u)** donde **u** es g(x), o sea la función interior, mientras que la **f** es la función exterior.

Entonces tenemos que la derivada de la función y = f(u) es la derivada de la función exterior multiplicada por la derivada de la función interior. **y' = f' (u) (u')**

Ejemplo 1: $y = (x^2 - 1)^3$ Sea $u = x^2 - 1$ y $u' = 2x$ entonces:

$y' = 3 (x^2 - 1)^2 (2x)$

$y' = 6x (x^2 - 1)^2$

Ejemplo 2: $y = (7x-4)^3$ Sea $u = 7x-4$ y $u' = 7$ entonces:

$y' = 3(7x-4)^2 (7)$

$y' = 21 (7x-4)^2$

Un caso especial de la Regla de la Cadena se conoce como Regla General de la Potencia y es aplicable cuando el exponente es una fracción.

$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$	en forma más simple →	$y = u^n$ $y' = un^{n-1} (u')$

Ejemplo: $y = (2x^2 + 5)^{3/2}$ donde $n = 3/2$ $u = 2x^2 + 5$ y $u' = 4x$

$y' = 3/2 (2x^2 + 5)^{1/2} (4x)$

$y' = 6x (2x^2 + 5)^{1/2}$

8.- Dx (sen u)= (cos u) (Dx u)

Ejemplo 1. $f(x) = \text{sen } 3x^2$ donde $u = 3x^2$ y $u' = 6x$

$f'(x) = \cos (3x^2) (6x)$

$f'(x) = 6x \cos 3x^2$

Ejemplo 2. $f(x) = \text{sen } 2x$ donde $u = 2x$ y $u' = 2$

$f'(x) = \cos 2x (2)$

$f'(x) = 2 \cos 2x$

9.- Dx (Cos u) = (-sen u) (Dx u)

Ejemplo 1. $f(x) = \cos 5x^6$ donde $u = 5x^6$ y $u' = 30x^5$

$f'(x) = (-\text{sen } 5x^6) (30x^5)$

$f'(x) = -30 x^5 \text{ sen } 5x^6$

Ejemplo 2. $f(x) = \cos (2x^3 - 3x)$

donde $u = 2x^3 - 3x$ y $u' = 6x^2 - 3$

$f'(x) = -\text{sen } (2x^3 - 3x) (6x^2 - 3)$

$f'(x) = -(6x^2 - 3) \text{ sen } (2x^3 - 3x)$

Ejemplo 3. $f(x) = \cos (x^3 + 5x)$

donde $u = x^3 + 5x$ y $u' = 3x^2 + 5$

$f'(x) = -\text{sen } (x^3 + 5x) (3x^2 + 5)$

$f'(x) = -(3x^2 + 5) \text{ sen } (x^3 + 5x)$

10.- Cuando debemos obtener la derivada de una constante elevada a una función derivable respecto de x se aplica el siguiente teorema: $\frac{d}{dx}(k^u) = (k^u) (\text{Ln } k) (u')$. Ejemplo: $f(x) = 4^{3x2}$ $f'(x) = (4^{3x2}) \text{ Ln}(4) (6x)$.

Problemas de Teoremas de Derivación.

56.- Calcula la derivada de $f(x) = x(x^2 – 3)$

Respuesta: $f'(x) = 3x^2 - 3$

57.- Tomando en cuenta que $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$, encuentra la derivada de h(x) utilizando la derivada de un producto de las funciones f(x) y g(x).

$h'(x) = 3x^2$

58.- Si n es un número entero positivo y $f(x) = x^n$, de acuerdo a la regla de diferenciación para potencias con exponentes enteros positivos indica a que es igual su derivada.

Respuesta: $f'(x) = nx^{n-1}$

59.- Tomando en cuenta que la $f(x) = (x^2 +2)$ y $g(x) = (x-1)$ encuentra la derivada de h(x) donde h(x) es el producto de f(x) con g(x).

Respuesta: $h'(x) = 3x^2 -2x + 2$

60.- Determina la derivada de la función
$f(x) = 3^{(2x2 - 5x+1)}$

Respuesta: $f'(x) = (3^{2x2-5x+1})$ Ln (3) (4x-5)

61.- ¿Cuál es la regla para derivar la función h(x) donde h(x) es el producto de f(x) y g(x) y éstas últimas son funciones derivables?

Respuesta: $h'(x) = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)$

62.- ¿Cuál es la fórmula que determina la derivada de una función?

Respuesta: $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

63.- Deriva la función $f(x) = 2x^5- 7x^6 +5x^4-9x + 1$ y encuentra el resultado de $f'(x)$

Respuesta: $f'(x) = 10x^4 – 42x^5 + 20x^3 - 9$

64.- Observa la siguiente f(x) =x^3 y g(x) = x^5 y encuentra la derivada de h(x) que representa la suma de las funciones f(x) y g(x)

Respuesta: $h'(x) = 3x^2 + 5x^4$

65.- ¿Cuál es la derivada de f(x) = $\sqrt{x}$?

Respuesta: $f'(x) = \frac{1}{2}\ x^{-1/2}$

66.- Si f(x) = x^2 y g(x)=(x), ¿cuál es la derivada de h(x) al usar la derivada de un cociente de las funciones f(x) y g(x)?

Respuesta: $h'(x) = 1$

67.- La derivada de la función f(x)$\frac{x^3}{x^2}$, utilizando la derivada del teorema del cociente es f' (x) =

Respuesta: 1

68.- ¿Cuál es la tasa de variación instantánea de “h” con respecto a “x”, y la de “h” con respecto a “y”, en
h= $x^2 + xy^2$?

Respuesta: $\frac{dh}{dx} = 2x + y^2$ y $\frac{dh}{dy} = x^2 + 2xy$

69.- Deriva f(x)=$\sqrt{\frac{1}{x}}$ y encuentra su resultado.

$f'(x) = \frac{-1}{2}\ x^{-3/2}$

70.- ¿Cuál es la derivada de la función f(x) = $\sqrt{x}$ + 4?

Respuesta: $\frac{1}{2x^{1/2}}$

71.- La primera y segunda derivadas respectivamente para la función f(x) = $x^3 + 2x^2 + 2$ son:

Respuesta: $f'(x) = 3x^2 + 4x$
$f''(x) = 6x + 4$

Problemas de derivación aplicada a la física.

72.- La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $v(t) = 40-5t^2$, donde t representa el tiempo en segundos. Tomando en cuenta los datos proporcionados determina la aceleración instantánea en m/s^2 para t=2s **Respuesta: -20**	73.- Si una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal y se desea encontrar la velocidad en un punto dado, ¿qué derivada es necesaria para encontrar su velocidad? **Respuesta: Primera derivada**
74.- La potencia eléctrica en un circuito es P (watts) y está dada por $P = \frac{v^2}{R}$ donde V= 10 volts y R= 5 Ohm, encuentra la tasa de cambio o variación de la potencia P con respecto a R. **Respuesta: 4 watts/ohms**	75.- Una partícula se mueve a la largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación $x= -4t + 2t^2$ donde "x" representa metros y "t" segundos. Calcula la velocidad instantánea en m/s de la partícula en t= 2.5 s. **Respuesta: 6 m/s**
76.- Si \$ C(x) representa el costo total en pesos por la fabricación de zapatos de una fábrica y x representa el número de zapatos, encuentra el costo marginal cuando se fabrican 10 zapatos, tomando en cuenta que x = 10 y $C(x) = 10 + 5x + 2x^2$ **Respuesta: \$C'(x) = C'(10) = 45 pesos.**	77.- Una fábrica de productos electrodomésticos determina que el costo marginal por producto "x" extractores de jugo para el hogar esta dado por \$ $C(x)= 5 + 2x +10x^2$. Calcular el costo marginal por producir 20 extractores de jugo. **Respuesta: \$C'(x) = C'(20) = 402 pesos**
78.- Si se conoce el desplazamiento que tiene un cuerpo en movimiento rectilíneo y se desea encontrar la aceleración que lleva en un tiempo dado. ¿Qué concepto se debe usar para encontrar su aceleración? **Respuesta: Segunda derivada**	79.- Si $C(x)= 5x^2 + 1$ es la función de costo al producir x unidades de algún bien de consumo. ¿Cuál es la tasa de variación del costo C(x) con respecto a x? **Respuesta: C'(x) = 10x**

80.- Si se deja caer un objeto desde un globo a 300ft de altura sobre el suelo, entonces su altura a los “t” segundos es $300\text{-}16t^2$. Encuentra la velocidad en ft/s en t=3 segundos. **Respuesta: -96 ft/s**	81.- El volumen de un cubo de lado s es $V= s^3$. Localiza el ritmo de cambio del volumen con respecto a “s” cuando s = 4 centímetros. **Respuesta: 48**
82.- Observa la siguiente función $y=3x^2 – 5x + 4$ y calcula la tasa de variación de “y” con respecto a “x”. **Respuesta: 6x-5**	83.- La corriente eléctrica en un circuito es I (Ampere) está dada por $I=\frac{V}{R}$ donde V= 50 volts y R= 25 Ohm, encuentra la tasa de cambio o variación de la corriente “I” con respecto a “R”. **Respuesta:** $\mathbf{\frac{dI}{dR} = -0.08}$ **ampere/ohm**
84.- El volumen V de un lago durante la temporada de lluvias está dado por $V(t)=10(t+1)^2m^3$. Donde t está dado en semanas que toma valores de t = 0, 1, 2 y 3 semanas. Determina el flujo de agua que llega al lago cuando t=3 semanas. **Respuesta: $80m^3$**	85.- La temperatura T(°C) de una mezcla de un proceso químico en función de “t”, está dada por $T(t)= 10 +30t +2t^2$, donde “t” esta dado en minutos. Calcula la tasa de variación o cambios de T(t) con respecto a “t”. **Respuesta: 30 + 4t minutos.**
86.- La temperatura de una persona en grados centígrados después de sufrir una enfermedad durante 3 días está dada por $f(t) = 35 + 10t -0.1t^2$ Encuentra la ecuación de la tasa de variación de la temperatura con respecto al tiempo y la tasa de variación de la temperatura cuando t = 3 días. **Respuestas: f’(t) = 10 - 0.2t** **f’(3) = 9.4°C**	87.- La siguiente opción demuestra que eres capaz de hacer un análisis de los fenómenos naturales que suceden a tu alrededor, como los huracanes, desde la perspectiva que te da el aprender los temas del Módulo 15 “Cálculo en fenómenos naturales y procesos sociales”. **Te das cuenta de que el avance del huracán es constante y puedes identificar los elementos que integran sus variables para calcular su movimiento.**

PARTE 3. LA INTEGRAL O ANTIDERIVADA.

El cálculo se compone de dos partes principales: **el cálculo diferencial y el cálculo integral**. El cálculo diferencial se basa en la operación de derivación de una función y el cálculo integral en la operación llamada integración. En esta parte se define a la integración como la operación inversa de la derivación. El puente entre estas dos operaciones contrarias, es el Teorema Fundamental del Cálculo que se enunciará más adelante.

La definición de integral está principalmente relacionada con la distancia recorrida por un móvil con velocidad no constante, con el trabajo mecánico desarrollado por una fuerza variable que desplaza cierta distancia a un objeto, así como también con el volumen o área de figuras o regiones con frontera curva en un sistema de coordenadas.

En el último cuarto del siglo XVII Newton y Leibniz, de manera independiente, sintetizaron dos conceptos, que hoy en día llamamos la derivada y la integral de una función y demostraron que ambos conceptos son inversos a través del conocido Teorema Fundamental del Cálculo.

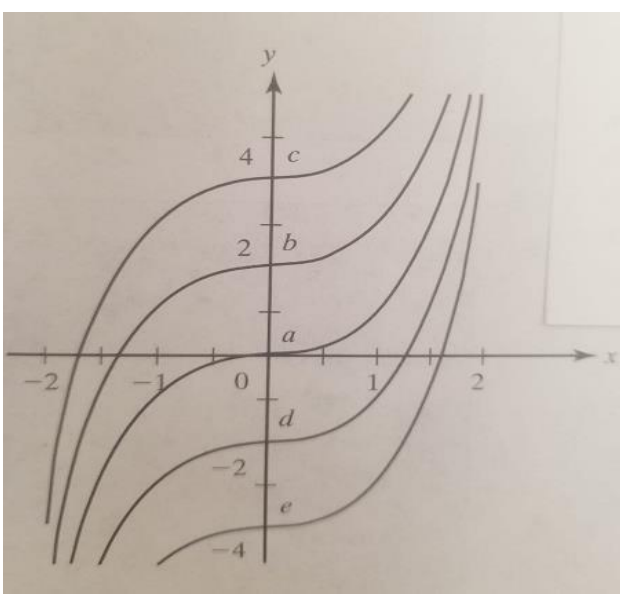
El concepto de la Integral se puede deducir de la necesidad de encontrar respuestas a fenómenos vinculados con el movimiento de los cuerpos…

¿Cómo determinar la distancia recorrida por un proyectil en caída libre a partir de la velocidad que se conoce y sabiendo que ésta no es constante? Pues hablamos de la operación llamada **Integración o Antiderivación.**
Antiderivación o Integración es el proceso que consiste en encontrar una función a partir de su derivada.

La antiderivada o integral indefinida de una función f(x) es otra función F(x) tal que:
$F'(x) = f(x)$

Por ejemplo si $f(x) = 6x^5$, entonces x^6 es una de sus antiderivadas ya que $Dx\,(x^6) = 6x^5$.
Asimismo, observa que las funciones: $g(x) = x^6 + 9$ y $h(x) = x^6 - 3$ son también antiderivadas de f(x), ya que $g'(x) = h'(x) = 6x^5$.

En la siguiente figura se representan varias antiderivadas de la función $f(x) = 3x^2$.



a) $y = x^3$

b) $y = x^3 + 2$

c) $y = x^3 + 4$

d) $y = x^3 - 2$

e) $y = x^3 - 4$

Si F(x) es una antiderivada de f(x), entonces podemos representar a toda la familia de sus antiderivadas sumándole a la antiderivada conocida una constante arbitraria. Por ejemplo:

2x es una antiderivada de x^2 y por lo tanto 2x + C representa a todas las antiderivadas de x^2, siempre que consideremos que el símbolo C recorra el conjunto de los números Reales.

Como lo acabamos de mencionar, la operación que consiste en hallar todas las antiderivadas de una función se llama **Integración**.

La notación $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ significa que si F(x) es una integral o antiderivada de f(x), entonces toda integral de f(x) es de la forma F(x) + C donde C es una constante arbitraria.

El símbolo $\int$ se denomina signo de integral y la expresión $\int f(x)dx$ se lee como "la antiderivada de f con respecto a x". Por consiguiente, la diferencial **dx** sirve para identificar a **x** como la variable de integración.
El concepto de Integral Indefinida es sinónimo de Antiderivada.

Fórmulas de Integración.

$$\boxed{\int 0\,dx = C}$$

Para todo n ≠ -1 tenemos que: $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Ejemplo 1. $\int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$

Ejemplo 2. $\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2x^2} + C$

Ejemplo 3. $\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}x^2 + C$

Si tenemos la función y = x, entonces y' = 1, por consiguiente $\int 1\,dx = \int dx = x + C$

Si tenemos $\int kx^n\,dx = k\int x^n\,dx = k\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ es decir, que sacamos la k de la integral.

Ejemplo 1. $\int 4x^2\,dx = 4\int x^2\,dx = \frac{4x^3}{3} + C$

Ejemplo 2. $\int -1/4\,dx = -1/4\int dx = -1/4\,x + C$

Admitiremos que **$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$** ya que la derivada de la suma o diferencia de funciones es la suma o diferencia de sus derivadas.

Ejemplo 1. $\int (2x^4 - 6x^2 + x + 4)\,dx = \int 2x^4\,dx - \int 6x^2 dx + \int x\,dx + \int 4\,dx$

$= 2\int x^4\,dx - 6\int x^2 dx + \int x\,dx + 4\int dx = \frac{2x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + C$

$= \frac{2}{5}x^5 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + C$

Ejemplo 2. $\int (x^2 - 4)\,dx = \int x^2\,dx - 4\int dx = \frac{x^3}{3} - 4x + C$

$\int \frac{dx}{x} = \text{Ln}\,|x| + C$

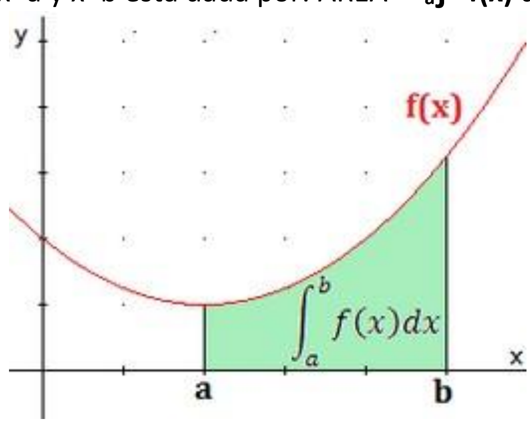
Ejemplo 1: $\int \frac{dx}{x+3} = \text{Ln}\,|x+3| + C$ Ejemplo 2: $\int \frac{2dx}{x^2+1} = \text{Ln}\,|x^2+1| + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

Ejemplo: $\int e^{x3}\,3x^2 dx = e^{x3} + C$

La integral definida como área de una región.

Si f es continua y no negativa sobre el intervalo [a,b], entonces el área de la región acotada por las gráficas de f, el eje x, las rectas verticales x=a y x=b está dada por: ÁREA = **$\int_a^b f(x)\,dx$**



Es importante señalar que las integrales definidas y las indefinidas aunque tengan notaciones similares, son identidades diferentes. Siempre debemos recordar que una integral definida es un número, mientras que una identidad indefinida es una familia de funciones.

Teorema Fundamental del Cálculo. Si una función f(x) admite antiderivada en el intervalo [a,b], entonces la integral definida de la función f(x) en el intervalo [a,b] denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$ es, por definición, el número real que resulta al restar F(a) de F(b), donde F(x) es una antiderivada de f(x), es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 1: $\int_1^2 2x^3\,dx = \frac{2x^4}{4} + C = \frac{x^4}{2} + C$ donde $F(x) = \frac{x^4}{2} + C$

Luego $\int_1^2 2x^3\,dx = F(2) - F(1) = \frac{2^4}{2} - \frac{1^4}{2} = 8 - ½ = \frac{15}{2}$

Ejemplo 2: $\int_2^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ donde $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$

Luego $\int_2^3 x^3\,dx = F(2) - F(1) = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4}$

Integración mediante el Cambio de Variable o Sustitución.

Tal como sucede con la Regla de la Cadena en la Derivación, también en la Integración hay una estrategia para integrar una función compuesta y ésta es denominada Integración mediante el Cambio de Variable o Sustitución.

Dicha estrategia consiste en identificar primero la función interna (a la que se le sustituye por la letra u), luego obtenemos la derivada de u para compararla con lo que tenemos en el integrando aparte de u (es decir, se compara con la parte correspondiente al diferencial) y por último se realiza la correcta sustitución o cambio de variable para poder comenzar a aplicar de manera más sencilla los teoremas de la integración.

Ejemplo 1: $\int (x^3+10)^8 x^2\,dx$ Donde $u = x^3 + 10$ y $du = 3x^2\,dx$ Comparamos du con la parte de la función correspondiente al diferencial: $du = 3x^2\,dx$ y para que quede igual debemos despejar: $\frac{du}{3} = x^2\,dx$ Ahora sí se hace la sustitución o el cambio de la variable: $\int u^8 \frac{du}{3}$ $= \frac{1}{3}\int u^8\,du = \frac{1}{3}\,\frac{u^9}{9} + C$ $= \frac{1}{27}u^9 + C = \frac{1}{27}(x^3+10)^9 + C$	Ejemplo 2: $\int (x^2+4)^4\,2x\,dx$ Donde $u = x^2 + 4$ y $du = 2x\,dx$ Comparamos du con la parte de la función correspondiente al diferencial: $du = 2x\,dx$ comprobamos que en este ejemplo sí son iguales por lo tanto no hay que despejar: $du = 2x\,dx$ Ahora sí se hace la sustitución o el cambio de la variable: $\int u^4\,du$ $= \frac{u^5}{5} + C = \frac{(x^2+4)^5}{5} + C$	Ejemplo 3: $\int (2x+3)^5\,dx$ Donde $u = 2x + 3$ y $du = 2\,dx$ Comparamos du con la parte de la función correspondiente al diferencial: $du = 2\,dx$ y para que quede igual debemos despejar: $\frac{du}{2} = dx$ Ahora sí se hace la sustitución o el cambio de la variable: $\int u^5 \frac{du}{2}$ $= \frac{1}{2}\int u^5\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^6}{6} + C$ $= \frac{1}{12}u^6 + C = \frac{(2x+3)^6}{12} + C$

Problemas.

88.- ¿Puedes elaborar una representación gráfica de los pasos necesarios para solucionar una integral? **Si crees poder hacerlo, ya que conoces los pasos, sólo tienes que separarlos para explicar cada uno de ellos.**	89.- ¿Cuál es la fórmula que se utiliza para encontrar la antiderivada de una función $f(x)=x^n$ donde n y p son números racionales? **Respuesta:** $\int X^n = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C$
90.- ¿Cuál es la antiderivada [F(x) +G(x)] si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$? **Respuesta:** $[F(x) + G(x)] = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$	91.- Determina la antiderivada de la función $f(x)= x^4 + x^3 +2 x^2 + x$ **Respuesta:** $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
92.- ¿Qué haces si se te pide que prepares una exposición acerca de cómo aplicar las antiderivadas en fenómenos naturales con algunos compañeros más, pero uno de ellos no entiende qué es lo que le toca hacer? **Respuesta: Le explicas pacientemente la tarea que le toca hasta que la comprenda y pueda realizarla.**	93.- ¿Por qué es falsa la siguiente afirmación? $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert \int_{-1}^{1} = 0$ **Respuesta: Porque la función tiene una discontinuidad en (-1, 1)**
94.- Utiliza el teorema fundamental del cálculo, para determinar el valor de $f(t)= t^2$ con límites de $\int_1^x f(t)$ **Respuesta:** $F'(x)=f(x)=x^2$ $\frac{1}{3}(x^3-1)$	95.- A partir del teorema fundamental del cálculo, encuentra el valor de $\int_1^2 x^3 dx$ **F(x) = 3.75**
96.- ¿Cuál es la antiderivada de la función $f(x)=x^5$? **Respuesta:** $\frac{x^6}{6} + C$	97.- ¿Cuál es la antiderivada de la función: $F(x) = (x+2)^2$? **Respuesta:** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$

98.- ¿Cuál es la antiderivada más general de $f(x) = (x-1)^2$? **Respuesta:** $\frac{1}{3}(x-1)^3 + C$	99.- ¿Cuál es el resultado de calcular $\int (2x+1)dx$? **Respuesta:** $x^2 + x + C$

100.- Ale tiene que hacer una tarea donde le piden investigar sobre Teorema fundamental del cálculo. En lugar de consultar el libro de texto Ale tuvo la idea de entrar a un foro de tareas en Internet denominado "Mi Tarea. com". Después de plantear su pregunta obtiene varias respuestas que deberá analizar antes de tomarlas como aceptables.

Esta es la secuencia de su diálogo:

Mi tarea!! RESPUESTAS

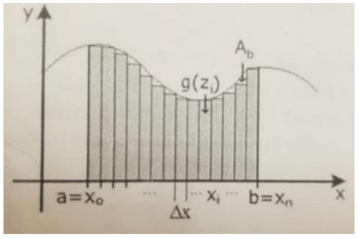
Ale 	Hola todos: Alguien me puede decir ¿Cuál teorema debes utilizar para calcular el área de una curva descrita por una función? Enviado hace 2 horas
Juan 	Creo que va por el teorema fundamental del cálculo Una persona la calificó como buena
Miguel 	Es el teorema de la integral indefinida Una persona la calificó como buena
Ismy 	Seguramente es el teorema del valor medio para integrales. Una persona la calificó como buena
Jonás 	Ps, yo me inclino + por el teorema de las sumas de Riemann Una persona la calificó como buena.
Ale 	Gracias a todos, sus opiniones son interesantes, pero creo que solo hay uno que acertó. Enviado hace 1 hora

Respuesta: Juan.

101.- ¿Cuál es el valor de $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$? **Respuesta: F(x) = 1.33**	102.- ¿Cuál es el resultado de $\int\sqrt{3x-4\ dx}$? **Respuesta:** $\frac{2}{9}(3x-4)^{3/2} + C$

103.- ¿Cuál es la antiderivada de f(x) = $\sqrt[4]{x^3}$? **Respuesta: F(x) = $\frac{4}{7}$ $x^{7/4}$ + C**	104.- ¿Cuál es la antiderivada de la función f(x)= $\frac{1}{x^3}$? **Respuesta: F'(x) = $\frac{-1}{2x^2}$ + C**
105.- ¿Cuál es el resultado de $\int \frac{dx}{x+5}$? **Respuesta: Ln |x+5| + C**	106.- En una función f(x) que es continua en un intervalo cerrado [a,b] y x es cualquier número de [a,b] y F (x) está definida por F(x) = $\int_a^x f(t)dx$ ¿a qué es igual F´(x)? **Respuesta: F'(x) = f(x)**
107.- Resuelve la integral definida $\int_{-1}^{2}(3x^2 - 2x + 3)\,dx =$ con las condiciones dadas. **Respuesta:$[x^3 - x^2 + 3x]_{-1}^{2} = 15$**	108.- ¿Cuál es el resultado de $\int_1^2 (4x^3 + 7)$dx= Utilizando el teorema fundamental del cálculo? **Respuesta:$[x^4 + 7x]_1^2 = 22$**
109.- ¿Cuál es el valor de la integral $\int_0^1 (2x^4 - 3x^2 + 5)\,dx$ **Respuesta: $\frac{2}{5}x^5 - x^3 + 5x = \frac{22}{5}$**	110.- Determinar el valor de $\int(x^3 - 2x)dx$ **Respuesta: $\frac{x^4}{4} - x^2 + C$**
111.- ¿Cuál es el valor de calcular la integral como se indica en $\int (3x-1)^3$ dx? **Respuesta: $\frac{1}{12}(3x-1)^4$ + C**	112.- ¿Cuál es el valor de $\int\sqrt{x + 7dx}$? **Respuesta: $\frac{2}{3}(x+7)^{3/2}$ +C**

113.- ¿Cuál es la expresión usada para calcular el área del espacio en blanco si "**A**" es el área bajo la curva en el intervalo **[a,b]?**



Respuesta: $A_b = A - \sum_{i=1}^{n} g\,(z_1)\Delta x$

114.- Si se aplica el teorema fundamental del cálculo, ¿cuál es el valor de $\int_1^0 x^{\frac{2}{3}}\, dx$?

Respuesta: -0.6

115.- Aplicando el teorema fundamental del cálculo ¿cuál es el valor de $\int_2^1 \frac{(x^{3\,+}\, x^2)}{x^2}\, dx$?

Respuesta: F(x) = -2.5

116.- ¿Cuál es el valor de $\int_0^2 (x^3 + x^2 + x)\, dx$ después de ser calculado?

F(x) = 8.66

117.- Calcula la integral $\int_0^1 x^2 + 3x - 1)$ dx y selecciona la opción que contenga su resultado:

Respuesta: $\frac{5}{6}$

118.- Calcula el valor de ∫ $(x^2 + 1)^2$ dx

Respuesta: $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$

119.- Selecciona la opción que completa la siguiente frase: Una función F(x) es una antiderivada de otra función f(x) si se cumple que ________________

Respuesta: F'(x) = f(x)

120.- ¿Qué es lo que haces para poder explicar por qué un problema de la vida diaria puede ser observado y resuelto aplicando el teorema fundamental del cálculo?
Respuesta: Escuchas los puntos de vista de los demás y preparas los tuyos para debilitarlos.

121.- Determina cuál es el valor de $\int_0^2 2x\, \sqrt{(x+2)}\, dx$

Respuesta: F(x)= 7.91