REPRESENTACIONES SIMBÓLICAS Y ALGORITMOS

REPRESENTACIONES SIMBÓLICAS Y ALGORITMOS

Secretaría de Educación Pública
Alonso Lujambio Irazábal

Subsecretaría de Educación Media Superior
Miguel Ángel Martínez Espinosa

Dirección General de Bachillerato
Carlos Santos Ancira

Asesoría Académica
Patricia González Flores

Autora
Norma Angélica García Morales

Apoyo técnico pedagógico
Margarita Reyes Ortiz

Diseño y diagramación
Visión Tipográfica Editores, S.A. de C.V.

Coordinación y servicios editoriales
Edere S.A. de C.V.
José Ángel Quintanilla D'Acosta
Mónica Lobatón Díaz

Material fotográfico e iconografía
Shutterstock Images, LLC
Martín Córdoba Salinas
Isabel Gómez Caravantes

Primera edición, 2012

Argentina 28, Centro,
06020, México, D. F.

ISBN 978-607-8229-20-8

Impreso en México

Tabla de contenido

Presentación general

Este módulo pertenece al campo disciplinar de las matemáticas, y tiene como propósito guiarte en el aprendizaje y la aplicación de representaciones simbólicas y algoritmos para la formulación y resolución de problemas. Este libro te orientará para que interpretes, analices y comprendas tu entorno a partir del planteamiento de situaciones problemáticas, que resolverás utilizando modelos matemáticos con números reales.

Representaciones simbólicas y algoritmos se ubica en el segundo nivel del plan de estudios de bachillerato que ha establecido la Secretaría de Educación Pública para la Preparatoria Abierta y que puede ser utilizado en las modalidades no escolarizada y mixta, en el que se promueve el desarrollo de habilidades de lenguaje en todas sus variantes. En este módulo en particular se favorece el desarrollo de competencias matemáticas relacionadas con el uso del lenguaje algebraico y el manejo adecuado de los números reales.

El módulo se estructura en dos unidades. En la primera abordarás los números reales, sus propiedades y aplicaciones. En la segunda aprenderás conceptos algebraicos que te permitirán resolver problemas de tu entorno utilizando modelos matemáticos.

En este libro los contenidos del módulo se plantean en función de los problemas a resolver en cada sección. Mediante la resolución de problemas apreciarás la utilidad de las matemáticas en tu vida diaria. De este modo aplicarás los saberes que vayas adquiriendo a lo largo del módulo en la resolución de una serie de interrogantes, sin que solo los manejes de forma mecánica, como en los libros tradicionales. Conforme avances en la lectura irás desarrollando las competencias y adquiriendo los conocimientos, habilidades y actitudes que se requieren para acreditar el módulo. Estos aprendizajes son herramientas imprescindibles para continuar con tu avance en el bachillerato. En el libro encontrarás el apoyo necesario para completar los aprendizajes de forma independiente.

Para facilitar tu estudio es importante que tengas muy claro qué implica aprender competencias, cómo debes estudiar en una modalidad no escolarizada y cómo utilizar este material. Antes de iniciar esta aventura de aprendizaje, revisa algunas recomendaciones preliminares y familiarízate con la estructura de este material.

¿Qué es una competencia?

En el contexto educativo, hablar de "competencias" no estamos haciendo referencia a una contienda entre dos o más personas por alcanzar determinado fin o a una justa deportiva. El acuerdo 442 de la Secretaría de Educación Pública define una competencia como la capacidad de actuar con base en la integración de conocimientos, habilidades, valores y actitudes.

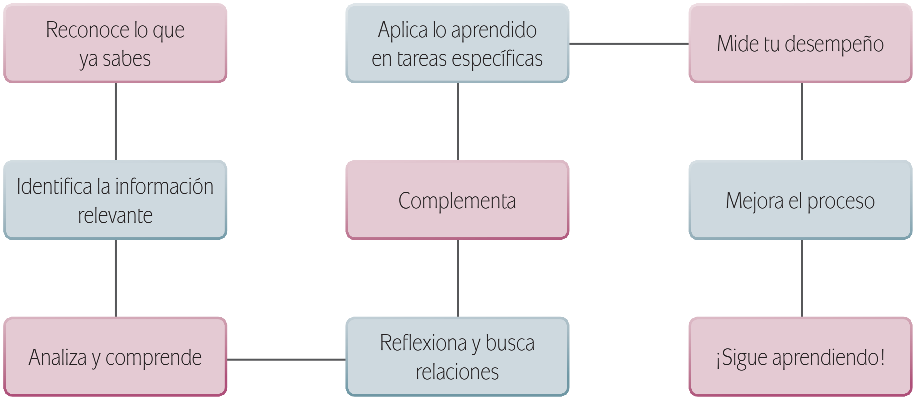
La meta de la formación como bachiller es que tú desarrolles las competencias que han sido definidas por la SEP como perfil de egreso para la Educación Media

Superior.[1] No se pretende que sólo memorices información, o que demuestres habilidades aisladas. Se busca que logres aplicar efectivamente tus conocimientos, habilidades, actitudes y valores en situaciones o problemas concretos.

La época actual, en donde la cantidad de información de la que se dispone en Internet, por ejemplo, crece de forma exponencial cada día, nos lleva a implementar formas diferentes de aprender, y únicamente memorizar contenidos resulta insuficiente. Ahora se requiere que puedas analizar la información y apropiarte de los conocimientos haciéndolos útiles para ti y tu entorno.

Por esto cuando estudies no debes orientar tus esfuerzos a memorizar los contenidos presentados. Identifica aquellos conceptos relevantes, analízalos con detenimiento para comprenderlos y reflexiona sobre cómo se relacionan con otros términos. Busca información adicional. Pero no te quedes allí, a través de las actividades sugeridas aprende cómo aplicarlos en las situaciones y contextos propuestos. Lo mismo sucede con las habilidades, los valores y las actitudes.

¿Qué hacer para aprender?



En este libro, además de leer y estudiar textos y procedimientos encontrarás problemas a resolver, casos a analizar y proyectos a ejecutar. Estos te ofrecerán evidencias sobre las capacidades que vas desarrollando y podrás valorar así tus avances.

Para acreditar el módulo deberás demostrar que eres capaz de analizar y resolver situaciones, problemas y casos que requieren de la articulación de conocimientos, habilidades, actitudes y valores.

[1] De acuerdo con el Marco Curricular Común, el estudiante de bachillerato deberá desarrollar tres tipos de competencias: genéricas, disciplinares y profesionales.

Estudiar en una modalidad no escolarizada

Una modalidad educativa no escolarizada como la que estás cursando tiene como ventaja una gran flexibilidad. Tú puedes decidir a qué hora y dónde estudias, y qué tan rápido avanzas. Puedes adecuar tus horarios a otras responsabilidades cotidianas que tengas que cubrir, como el trabajo, la familia o cualquier proyecto personal.

En esta modalidad educativa, se requiere que tú:

- Gestiones o administres tu proceso de aprendizaje, es decir que:
    - Definas tus metas personales, considerando los objetivos de aprendizaje de los módulos.
    - Asignes tiempo para el estudio y procures contar con todos los recursos necesarios en un espacio apropiado.
    - Regules tu ritmo de avance.
    - Aproveches los materiales didácticos que la SEP ha preparado para apoyarte.
    - Utilices otros recursos que puedan ayudarte a profundizar tu aprendizaje.
    - Identifiques cuando enfrentas dificultades para aprender y busques ayuda para superarlas.
- Te involucres de manera activa en tu aprendizaje, es decir que:
    - Leas para comprender las ideas principales que se te presentan y construir significados.
    - Recurras a tu experiencia como punto de partida para el aprendizaje.
    - Realices las actividades propuestas y revises los productos que generes.
    - Reconozcas tus fortalezas y tus debilidades como estudiante.
    - Selecciones las técnicas de estudio que funcionen mejor para ti.
    - Emprendas acciones para enriquecer tus capacidades para aprender y potenciar tus limitaciones.
- Asumas una postura crítica y propositiva, es decir que:
    - Analices los conceptos que se presentan.
    - Indagues sobre los temas que estudias y explores distintos planteamientos en torno a ellos.
    - Plantees alternativas de solución a los problemas.
    - Explores formas diversas de enfrentar las situaciones.
    - Adoptes una postura personal en los distintos debates.
- Seas honesto y te comprometas contigo mismo, es decir que:
    - Realices las actividades, tú.
    - Consultes las respuestas después de haberlas hecho.
    - Si requieres apoyo en algún momento, acudas a los Centros de Servicio de Prepratoria Abierta.

  - Destines el tiempo de estudio necesario para lograr los resultados de aprendizaje.

- Evalúes tus logros de manera constante, es decir que:
  - Analices tu ejecución de las tareas y los productos que generes utilizando la retroalimentación que se ofrece en el libro.
  - Identifiques los aprendizajes que alcances utilizando los referentes que te ofrece el material.
  - Reconozcas las limitaciones en tu aprendizaje y emprendas acciones para superarlas.
  - Aproveches tus errores como una oportunidad para aprender.

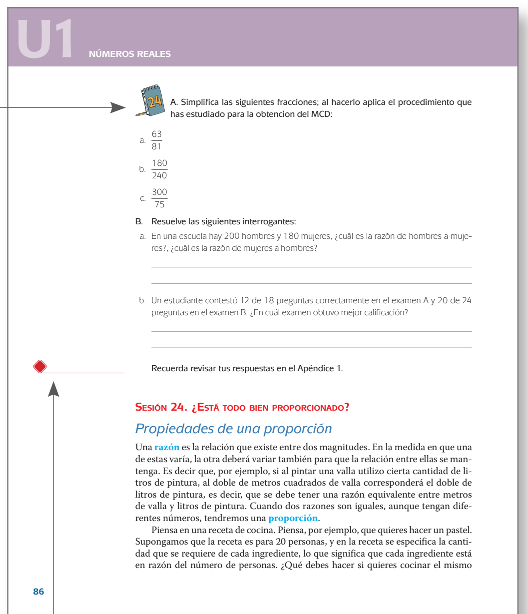
- Reflexiones sobre tu propio proceso de aprendizaje, es decir que:
  - Te preguntes: ¿qué estoy haciendo bien?, ¿qué es lo que no me ha funcionado?
  - Realices ajustes en tus estrategias para mejorar tus resultados de aprendizaje.

Como puedes ver, el estudio independiente es una tarea compleja que implica el desarrollo de muchas habilidades que irás adquiriendo y mejorando a medida que avances en tus estudios. El componente principal es que estés comprometido con tu aprendizaje.

Cómo utilizar este material

Este libro te brinda los elementos fundamentales para apoyarte en tu aprendizaje a pesar de que la mayor parte del tiempo estudies de manera independiente. Para completar el estudio del módulo debes:

1. Identificar los resultados de aprendizaje. Revisa la sección *Presentación general* y estudia con detenimiento el propósito general, los saberes y las competencias que deberás desarrollar así como la explicación general de las unidades. Si tienes muy claro lo que se espera que aprendas y cómo se ha planeado el módulo, será más fácil que orientes tus esfuerzos a lograrlo.
2. Definir tu plan personal de trabajo utilizando las recomendaciones de la sección *Tu plan de trabajo*.



U1 NÚMEROS REALES

A. Simplifica las siguientes fracciones; al hacerlo aplica el procedimiento que has estudiado para la obtencion del MCD:

a. $\frac{63}{81}$

b. $\frac{180}{240}$

c. $\frac{300}{75}$

B. Resuelve las siguientes interrogantes:

a. En una escuela hay 200 hombres y 180 mujeres, ¿cuál es la razón de hombres a mujeres?, ¿cuál es la razón de mujeres a hombres?

b. Un estudiante contestó 12 de 18 preguntas correctamente en el examen A y 20 de 24 preguntas en el examen B. ¿En cuál examen obtuvo mejor calificación?

Recuerda revisar tus respuestas en el Apéndice 1.

SESIÓN 24. ¿ESTÁ TODO BIEN PROPORCIONADO?

Propiedades de una proporción

Una **razón** es la relación que existe entre dos magnitudes. En la medida en que una de estas varía, la otra deberá variar también para que la relación entre ellas se mantenga. Es decir que, por ejemplo, si al pintar una valla utilizo cierta cantidad de litros de pintura, al doble de metros cuadrados de valla corresponderá el doble de litros de pintura, es decir, que se debe tener una razón equivalente entre metros de valla y litros de pintura. Cuando dos razones son iguales, aunque tengan diferentes números, tendremos una **proporción**.

Piensa en una receta de cocina. Piensa, por ejemplo, que quieres hacer un pastel. Supongamos que la receta es para 20 personas, y en la receta se especifica la cantidad que se requiere de cada ingrediente, lo que significa que cada ingrediente está en razón del número de personas. ¿Qué debes hacer si quieres cocinar el mismo

86

Actividad de aprendizaje

Encontrarás una gran diversidad de actividades que te ayudarán a desarrollar competencias. Lee las instrucciones con atención y ejecútalas para aprender.

Alto

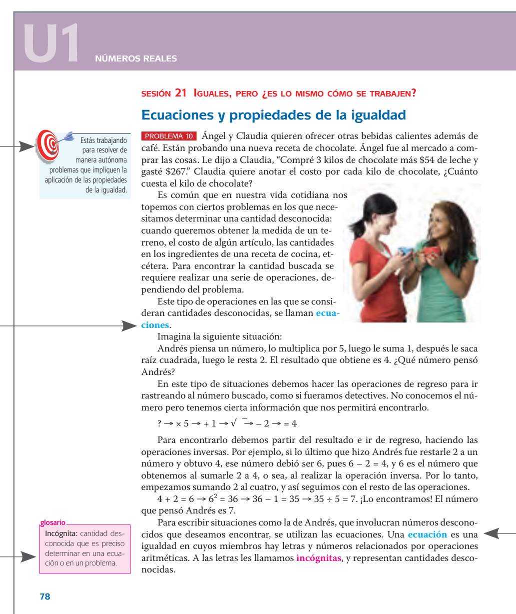
Sugiere puntos donde puedes interrumpir el estudio sin dejar un proceso incompleto.

Indicadores de desempeño que trabajarás en cada sección

Estos indicadores enuncian la tarea que debes aprender a realizar como resultado del estudio. Utilízalos como referente conforme realices las actividades y valora de manera continua la medida en la cual vas dominando esos desempeños.

Conceptos clave

Resalta los conceptos esenciales para la situación que estás analizando. Identifícalos y presta especial atención para comprenderlos y problematizarlos.



U1 NÚMEROS REALES

SESIÓN 21 IGUALES, PERO ¿ES LO MISMO CÓMO SE TRABAJEN?

Ecuaciones y propiedades de la igualdad

Estás trabajando para resolver de manera autónoma problemas que impliquen la aplicación de las propiedades de la igualdad.

PROBLEMA 10 Ángel y Claudia quieren ofrecer otras bebidas calientes además de café. Están probando una nueva receta de chocolate. Ángel fue al mercado a comprar las cosas. Le dijo a Claudia, “Compré 3 kilos de chocolate más \$54 de leche y gasté \$267.” Claudia quiere anotar el costo por cada kilo de chocolate, ¿Cuánto cuesta el kilo de chocolate?

Es común que en nuestra vida cotidiana nos topemos con ciertos problemas en los que necesitamos determinar una cantidad desconocida: cuando queremos obtener la medida de un terreno, el costo de algún artículo, las cantidades en los ingredientes de una receta de cocina, etcétera. Para encontrar la cantidad buscada se requiere realizar una serie de operaciones, dependiendo del problema.

Este tipo de operaciones en las que se consideran cantidades desconocidas, se llaman **ecuaciones**.

Imagina la siguiente situación:

Andrés piensa un número, lo multiplica por 5, luego le suma 1, después le saca raíz cuadrada, luego le resta 2. El resultado que obtiene es 4. ¿Qué número pensó Andrés?

En este tipo de situaciones debemos hacer las operaciones de regreso para ir rastreando al número buscado, como si fuéramos detectives. No conocemos el número pero tenemos cierta información que nos permitirá encontrarlo.

$? \rightarrow \times 5 \rightarrow +1 \rightarrow \sqrt{\ } \rightarrow -2 \rightarrow = 4$

Para encontrarlo debemos partir del resultado e ir de regreso, haciendo las operaciones inversas. Por ejemplo, si lo último que hizo Andrés fue restarle 2 a un número y obtuvo 4, ese número debió ser 6, pues $6 - 2 = 4$, y 6 es el número que obtenemos al sumarle 2 a 4, o sea, al realizar la operación inversa. Por lo tanto, empezamos sumando 2 al cuatro, y así seguimos con el resto de las operaciones.

$4 + 2 = 6 \rightarrow 6^2 = 36 \rightarrow 36 - 1 = 35 \rightarrow 35 \div 5 = 7$. ¡Lo encontramos! El número que pensó Andrés es 7.

Para escribir situaciones como la de Andrés, que involucran números desconocidos que deseamos encontrar, se utilizan las ecuaciones. Una **ecuación** es una igualdad en cuyos miembros hay letras y números relacionados por operaciones aritméticas. A las letras les llamamos **incógnitas**, y representan cantidades desconocidas.

glosario

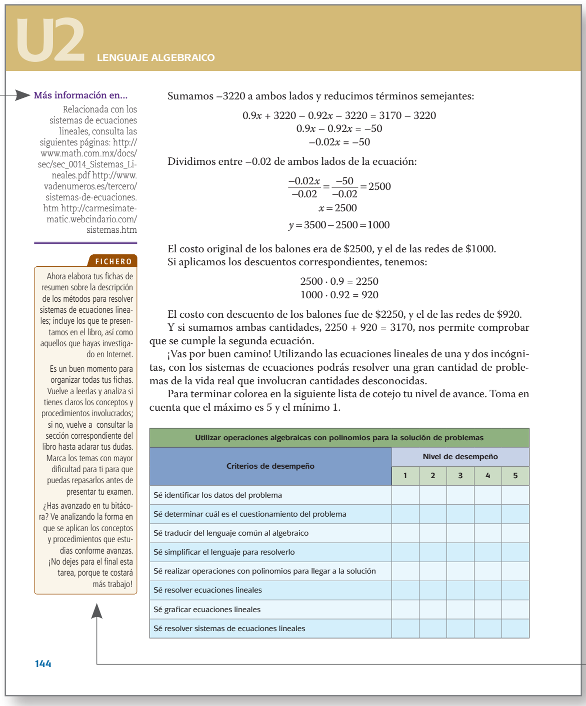
Incógnita: cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación o en un problema.

78

Glosario

Resalta aquellos términos que pueden ser difíciles de comprender. En el margen encontrarás la definición correspondiente. ¡No avances si no entiendes algún término! Es uno de los atributos de un buen lector.

3. Valorar si posees los saberes requeridos para estudiar con éxito el módulo. Realiza la evaluación diagnóstica que se incluye en la sección *¿Con qué saberes cuento?* Más vale identificar desde el inicio si necesitas aprender o fortalecer algún conocimiento o habilidad antes de comenzar el módulo.
4. Estudiar las unidades en el orden que se te propone, o en otro que tú elijas. Cada una de las unidades contiene las actividades de aprendizaje y la información necesaria para realizarlas. Sin embargo, en ocasiones se te sugerirá consultar fuentes adicionales.
5. Consultar en el Apéndice 1 la retroalimentación, para que puedas evaluar los productos que realices y los avances que logres.
6. Completar la evaluación final del módulo *¿Ya estoy preparado(a)?* para valorar si ya lograste



U2 LENGUAJE ALGEBRAICO

Más información en...

Relacionada con los sistemas de ecuaciones lineales, consulta las siguientes páginas: http://www.math.com.mx/docs/sec/sec_0014_Sistemas_Lineales.pdf http://www.vadenumeros.es/tercero/sistemas-de-ecuaciones.htm http://carmesimatematic.webcindario.com/sistemas.htm

FICHERO

Ahora elabora tus fichas de resumen sobre la descripción de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales; incluye los que te presentamos en el libro, así como aquellos que hayas investigado en Internet.

Es un buen momento para organizar todas tus fichas. Vuelve a leerlas y analiza si tienes claros los conceptos y procedimientos involucrados; si no, vuelve a consultar la sección correspondiente del libro hasta aclarar tus dudas. Marca los temas con mayor dificultad para ti para que puedas repasarlos antes de presentar tu examen.

¿Has avanzado en tu bitácora? Ve analizando la forma en que se aplican los conceptos y procedimientos que estudias conforme avanzas. ¡No dejes para el final esta tarea, porque te costará más trabajo!

Sumamos −3220 a ambos lados y reducimos términos semejantes:

$$0.9x + 3220 - 0.92x - 3220 = 3170 - 3220$$
$$0.9x - 0.92x = -50$$
$$-0.02x = -50$$

Dividimos entre −0.02 de ambos lados de la ecuación:

$$\frac{-0.02x}{-0.02} = \frac{-50}{-0.02} = 2500$$
$$x = 2500$$
$$y = 3500 - 2500 = 1000$$

El costo original de los balones era de $2500, y el de las redes de $1000.
Si aplicamos los descuentos correspondientes, tenemos:

$$2500 \cdot 0.9 = 2250$$
$$1000 \cdot 0.92 = 920$$

El costo con descuento de los balones fue de $2250, y el de las redes de $920.
Y si sumamos ambas cantidades, 2250 + 920 = 3170, nos permite comprobar que se cumple la segunda ecuación.
¡Vas por buen camino! Utilizando las ecuaciones lineales de una y dos incógnitas, con los sistemas de ecuaciones podrás resolver una gran cantidad de problemas de la vida real que involucran cantidades desconocidas.
Para terminar colorea en la siguiente lista de cotejo tu nivel de avance. Toma en cuenta que el máximo es 5 y el mínimo 1.

Utilizar operaciones algebraicas con polinomios para la solución de problemas					
Criterios de desempeño	Nivel de desempeño				
	1	2	3	4	5
Sé identificar los datos del problema					
Sé determinar cuál es el cuestionamiento del problema					
Sé traducir del lenguaje común al algebraico					
Sé simplificar el lenguaje para resolverlo					
Sé realizar operaciones con polinomios para llegar a la solución					
Sé resolver ecuaciones lineales					
Sé graficar ecuaciones lineales					
Sé resolver sistemas de ecuaciones lineales					

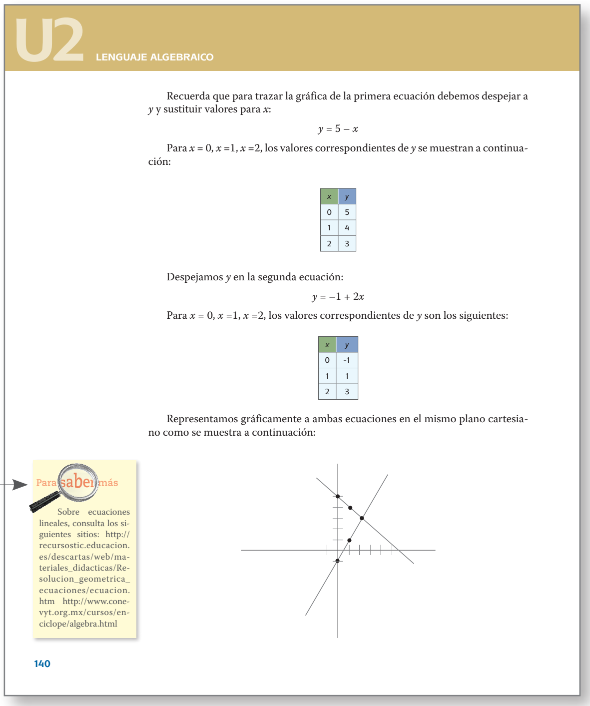
144

Fichero

Sugerencias de elaboración de fichas de información relevante.

Más información en...

Para lograr mayor información sobre algún tema en particular te recomienda recursos bibliográficos y electrónicos.



U2 LENGUAJE ALGEBRAICO

Recuerda que para trazar la gráfica de la primera ecuación debemos despejar a y y sustituir valores para x:

$$y = 5 - x$$

Para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, los valores correspondientes de y se muestran a continuación:

x	y
0	5
1	4
2	3

Despejamos y en la segunda ecuación:

$$y = -1 + 2x$$

Para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, los valores correspondientes de y son los siguientes:

x	y
0	-1
1	1
2	3

Representamos gráficamente a ambas ecuaciones en el mismo plano cartesiano como se muestra a continuación:

Para saber más

Sobre ecuaciones lineales, consulta los siguientes sitios: http://recursostic.educacion.es/descartas/web/materiales_didacticas/Resolucion_geometrica_ecuaciones/ecuacion.htm http://www.conevyt.org.mx/cursos/enciclope/algebra.html

140

Para saber más

Te da tips para adquirir más conocimientos sobre algún tema específico.

los aprendizajes propuestos. Es muy importante que califiques honestamente tus respuestas y una vez que tengas los resultados pienses sobre lo que sí te funcionó y lo que no de las acciones que aplicaste para aprender en cada tema y de esa forma adoptes mejoras para tu proceso de aprendizaje.

7. Presentar la evaluación de la SEP para acreditar el módulo.

Este libro ha sido diseñado para ayudarte a encontrar la información que requieres y facilitar la gestión de tu aprendizaje.

¡Familiarízate con los elementos gráficos que encontrarás!

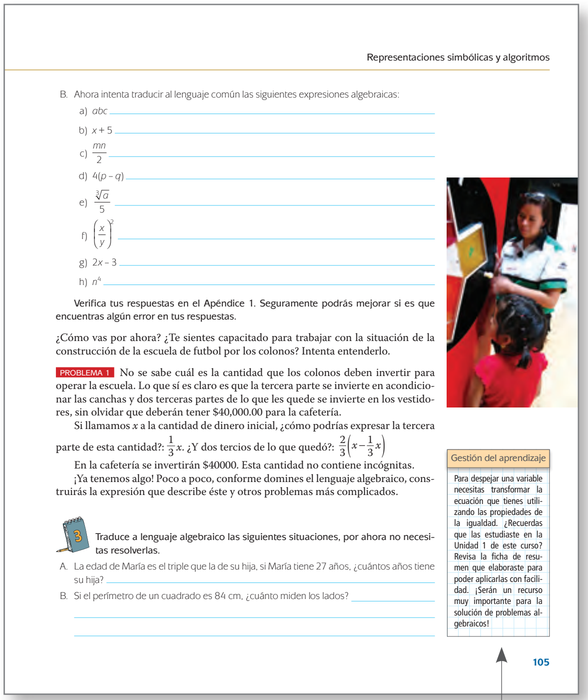
Conforme avances irás identificando cuáles de estos recursos te resultan más útiles dadas tus capacidades para aprender y tu estilo de aprendizaje. ¡Úsalos para sacar el mayor provecho de este libro!

Gestión de aprendizaje

Incluye algunos comentarios del autor que se relacionan con el tema estudiado y te permiten profundizar el aprendizaje.

Un momento de reflexión

Te señala los procesos que debes reflexionar y entender antes de iniciar la solución a los problemas que te plantean.


Representaciones simbólicas y algoritmos

B. Ahora intenta traducir al lenguaje común las siguientes expresiones algebraicas:

a) abc _____

b) $x + 5$ _____

c) $\frac{mn}{2}$ _____

d) $4(p - q)$ _____

e) $\frac{\sqrt[3]{a}}{5}$ _____

f) $\left(\frac{x}{y}\right)^2$ _____

g) $2x - 3$ _____

h) n^4 _____

Verifica tus respuestas en el Apéndice 1. Seguramente podrás mejorar si es que encuentras algún error en tus respuestas.

¿Cómo vas por ahora? ¿Te sientes capacitado para trabajar con la situación de la construcción de la escuela de futbol por los colonos? Intenta entenderlo.

PROBLEMA 1 No se sabe cuál es la cantidad que los colonos deben invertir para operar la escuela. Lo que sí es claro es que la tercera parte se invierte en acondicionar las canchas y dos terceras partes de lo que les quede se invierte en los vestidores, sin olvidar que deberán tener $40,000.00 para la cafetería.

Si llamamos x a la cantidad de dinero inicial, ¿cómo podrías expresar la tercera parte de esta cantidad?: $\frac{1}{3}x$. ¿Y dos tercios de lo que quedó?: $\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}x\right)$

En la cafetería se invertirán $40000. Esta cantidad no contiene incógnitas.

¡Ya tenemos algo! Poco a poco, conforme domines el lenguaje algebraico, construirás la expresión que describe éste y otros problemas más complicados.

3 Traduce a lenguaje algebraico las siguientes situaciones, por ahora no necesitas resolverlas.

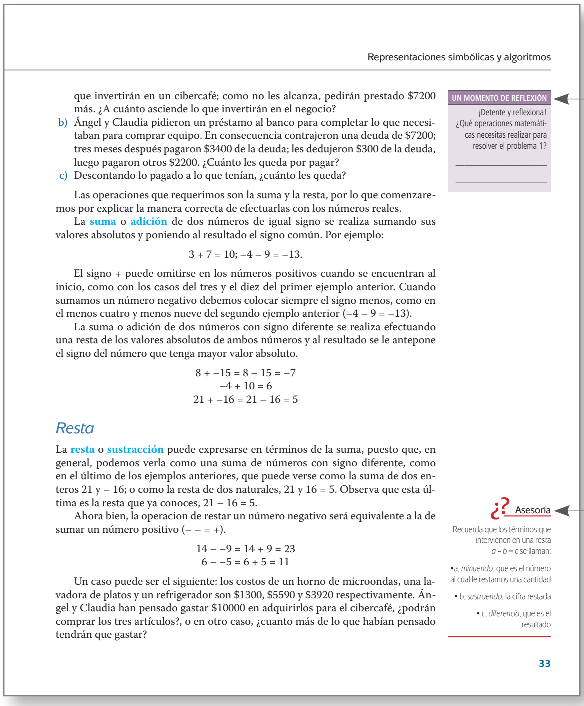
A. La edad de María es el triple que la de su hija, si María tiene 27 años, ¿cuántos años tiene su hija? _____

B. Si el perímetro de un cuadrado es 84 cm, ¿cuánto miden los lados? _____

Gestión del aprendizaje

Para despejar una variable necesitas transformar la ecuación que tienes utilizando las propiedades de la igualdad. ¿Recuerdas que las estudiaste en la Unidad 1 de este curso? Revisa la ficha de resumen que elaboraste para poder aplicarlas con facilidad. ¡Serán un recurso muy importante para la solución de problemas algebraicos!

105


Representaciones simbólicas y algoritmos

que invertirán en un cibercafé; como no les alcanza, pedirán prestado $7200 más. ¿A cuánto asciende lo que invertirán en el negocio?

b) Ángel y Claudia pidieron un préstamo al banco para completar lo que necesitaban para comprar equipo. En consecuencia contrajeron una deuda de $7200; tres meses después pagaron $3400 de la deuda; les dedujeron $300 de la deuda, luego pagaron otros $2200. ¿Cuánto les queda por pagar?

c) Descontando lo pagado a lo que tenían, ¿cuánto les queda?

Las operaciones que requerimos son la suma y la resta, por lo que comenzaremos por explicar la manera correcta de efectuarlas con los números reales.

La **suma** o **adición** de dos números de igual signo se realiza sumando sus valores absolutos y poniendo al resultado el signo común. Por ejemplo:

$$3 + 7 = 10; -4 - 9 = -13.$$

El signo + puede omitirse en los números positivos cuando se encuentran al inicio, como con los casos del tres y el diez del primer ejemplo anterior. Cuando sumamos un número negativo debemos colocar siempre el signo menos, como en el menos cuatro y menos nueve del segundo ejemplo anterior ($-4 - 9 = -13$).

La suma o adición de dos números con signo diferente se realiza efectuando una resta de los valores absolutos de ambos números y al resultado se le antepone el signo del número que tenga mayor valor absoluto.

$$8 + -15 = 8 - 15 = -7$$
$$-4 + 10 = 6$$
$$21 + -16 = 21 - 16 = 5$$

Resta

La **resta** o **sustracción** puede expresarse en términos de la suma, puesto que, en general, podemos verla como una suma de números con signo diferente, como en el último de los ejemplos anteriores, que puede verse como la suma de dos enteros 21 y – 16; o como la resta de dos naturales, 21 y 16 = 5. Observa que esta última es la resta que ya conoces, 21 – 16 = 5.

Ahora bien, la operacion de restar un número negativo será equivalente a la de sumar un número positivo (– – = +).

$$14 - -9 = 14 + 9 = 23$$
$$6 - -5 = 6 + 5 = 11$$

Un caso puede ser el siguiente: los costos de un horno de microondas, una lavadora de platos y un refrigerador son $1300, $5590 y $3920 respectivamente. Ángel y Claudia han pensado gastar $10000 en adquirirlos para el cibercafé, ¿podrán comprar los tres artículos?, o en otro caso, ¿cuanto más de lo que habían pensado tendrán que gastar?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¡Detente y reflexiona! ¿Qué operaciones matemáticas necesitas realizar para resolver el problema 1?

_____

_____

¿? Asesoría

Recuerda que los términos que intervienen en una resta $a - b = c$ se llaman:

- a, *minuendo*, que es el número al cual le restamos una cantidad
- b, *sustraendo*, la cifra restada
- c, *diferencia*, que es el resultado

33

Asesoría

Presenta elementos de refuerzo sobre temas importantes o que se estudiaron en niveles previos a la preparatoria.

¿Con qué saberes cuento?

Actividad

Para el estudio de este módulo necesitas contar con algunos conocimientos previos. Realiza la siguiente evaluación diagnóstica para comprobar que cuentas con los requisitos para comenzar la unidad, o de lo contrario, que sepas qué temas deberás repasar.

Contesta las siguientes preguntas para valorar tus competencias matemáticas. Escribe la respuesta en este libro, pero utiliza hojas para registrar el procedimiento que sigues en cada caso. Conserva tus anotaciones para que puedas analizar los pasos que seguiste al revisar tus respuestas.

1. Resuelve las siguientes operaciones con números naturales:

   I. $5 \cdot (7 + 9) =$

   II. $\left(\dfrac{32-7}{5}\right)+8=$

   III. $6 \cdot (41 - 5 \cdot (3 + 4)) + 4 =$

2. Encuentra el número natural que falta en las siguientes operaciones:

   I. $4 \cdot (6 + \_\_\_\_\_) = 44$

   II. $\dfrac{(27 - \_\_\_\_\_)}{5} + 4 = 8$

   III. $19 \cdot \_\_\_\_\_ + 4 = 42$

3. Resuelve los siguientes problemas de números naturales:

   I. Dados los números 3, 5, 7 y 9, forma todos los números posibles de tres cifras diferentes y ordénalos de menor a mayor.

   II. Con el dinero que tengo y $2,400.00 más, podría pagar una deuda de $5,200.00 y me sobrarían $300.00, ¿cuánto dinero tengo?

   III. Laura compró una casa por $434,500.00 y luego la vendió ganando $65,250.00, ¿por cuánto la vendió?

   IV. Víctor compró una casa, y luego la vendió por $562,200.00 ganando $38,788.00, ¿por cuánto la compró?

   V. ¿Cuántos años son 8,395 días? (Considera todos los años como de 365 días.)

   VI. Una agencia tiene una marca de auto disponible en color rojo, azul, blanco y gris; en modelos con dos puertas y con cuatro puertas; con la opción de elegirlo con o sin aire acondicionado. Luis quiere comprar un auto de esa marca, ¿cuántas opciones diferentes tiene?

   VII. En un aeropuerto aterriza un avión cada 15 minutos, ¿cuántos aviones aterrizan en 2 días?

4. Resuelve los siguientes problemas de perímetros y áreas:

I. Si un rectángulo tiene una base de 12 cm y un área de 84 cm^2, ¿cuánto mide su altura?

II. Si el área de un cuadrado es 121 cm^2, ¿cuál es su perímetro?
III. Si el perímetro de un rombo es de 84 m, ¿cuánto miden sus lados?
IV. Si el perímetro de un cuadrado mide 36 cm, ¿cuánto mide su área?

Una vez que terminaste consulta el Apéndice 1 y revisa si tus respuestas son correctas. Analiza no solo el resultado que obtuviste sino también los pasos que seguiste. ¡Recuerda que los errores son oportunidades para aprender! Pero también que el que bien aprende se equivoca menos. Si es necesario, repasa los temas que se sugieren en la retroalimentación antes de iniciar el estudio de este módulo.

Si no aprobaste la evaluación diagnóstica revisa tus libros y apuntes de secundaria, o bien, revisa la siguiente bibliografía:

Fuenlabrada de la Vega, S. (1994). Matemáticas I: aritmética y álgebra. México: McGraw-Hill.

Baldor, A. (1974). Aritmética teórico práctica; con 7008 ejercicios y problemas. Bogotá: Cultural Colombiana.

Quijano, J. (1964). Aritmética y nociones de álgebra y geometría. México: Porrúa.

http://docente.ucol.mx/grios/aritmetica/numenatu.htm

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/naturales1/index.htm

http://www.vitutor.com/di/n/problemas_naturales.html

¿Listo? Comienza con la Unidad 1.

UNIDAD 1

Números reales

¿Qué voy a aprender y cómo?

Poner un negocio es para muchas personas un sueño, algo que siempre han pensado. Se imaginan dueños de una florería, una taquería, una tienda de abarrotes, un salón de belleza y hasta de un moderno cibercafé. Si tienen suerte se convierten en pequeños empresarios y sobreviven, pero un gran número de proyectos fracasan y sus promotores se frustran. ¿Qué habría que hacer para que el sueño se convierta en realidad y el soñador sea exitoso? Primero, pensar antes de actuar, trazar una ruta para llegar a la meta. Después, no dejar de buscar y encontrar caminos no evidentes para enfrentar situaciones difíciles y salidas a cualquier obstáculo, siempre con la idea de alcanzar el objetivo deseado.

Propósito

El propósito de esta unidad es que utilices los números reales en la resolución de problemas relacionados con diversas áreas del conocimiento y con tu entorno.

Saberes

Para interpretar situaciones problemáticas y construir alternativas de solución deberás familiarizarte con los números reales y sus subconjuntos (enteros positivos y negativos, racionales e irracionales); manejar las operaciones básicas con ellos (suma, resta, multiplicación, división, potencia y radicación); aplicar las reglas de cada una, incluyendo los principios de los exponentes y las raíces; realizar operaciones en casos particulares como las fracciones; analizar la divisibilidad y los conceptos relacionados con ésta: divisores, múltiplos, números primos y compuestos, mínimo común múltiplo y máximo común divisor; aplicar las propiedades de la igualdad para manipular ecuaciones y despejar la incógnita; y utilizar las razones y proporciones para analizar relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas. Todo ello con una actitud analítica, sistemática, creativa y, por supuesto, ¡de autonomía!

¿Cuáles serán los resultados de mi trabajo?

Para alcanzar el propósito descrito:

- Resolverás de manera creativa situaciones problemáticas, mediante las operaciones básicas con números naturales, enteros, racionales y reales.
- Resolverás de manera autónoma problemas que impliquen la aplicación de las propiedades de los exponentes y de la igualdad.
- Resolverás problemas diversos aplicando razones y proporciones.

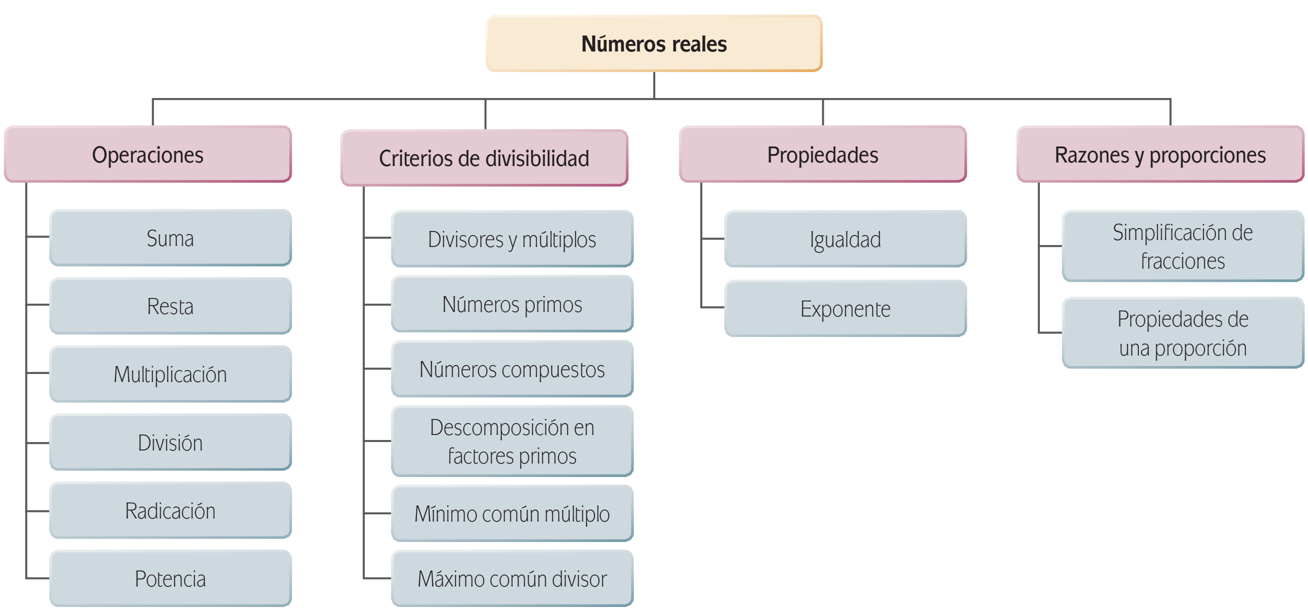
Tu plan de trabajo

Tiempo

Antes de comenzar a trabajar es recomendable que organices tu estudio tomando en cuenta la estructura de la unidad en sesiones. En cada una de éstas encontrarás conceptos y principios aritméticos que te permitirán solucionar las diversas situaciones que dos universitarios, Ángel y Claudia, enfrentan en su proyecto de establecer un cibercafé y que podrán modelar la manera como tú puedes afrontar problemas referentes a cuestiones matemáticas en tu vida cotidiana.

Para organizar tu trabajo considera que:

- En el siguiente esquema se enuncian los contenidos, recuerda que después de estudiarlo puedes decidir si el orden propuesto en el libro te conviene o si lo modificas y estableces tu propio orden.



- Requieres un tiempo estimado de 24 horas de estudio para esta unidad. Es aconsejable que lo programes en sesiones de estudio mínimo de una hora para no interrumpir procesos y actividades. Procura conseguir un sitio apropiado, con buena iluminación, en el que estés cómodo, que haya los menores distractores o ruidos y que puedas concentrarte mejor.

Forma de trabajo

Para trabajar con eficiencia lee de manera analítica y comprensiva tanto las explicaciones de los conceptos como los procedimientos y datos de los problemas, ello te llevará a la aplicación y uso de las operaciones matemáticas de manera certera.

- Cuando se te planteen preguntas, detente a reflexionar sobre ellas y continúa hasta que consideres que las has entendido completamente.
- Trabaja las actividades desarrollando todo el proceso de análisis que se requiere para resolver los problemas o las interrogantes. No te limites a buscar el resultado.
- Se sugieren altos al término de cada sesión; en estos lugares sugeridos, o en cualquier otro en que detengas el estudio, será una buena idea que cuando reanudes el estudio repases, aunque sea de manera somera, la última sesión estudiada, tanto para refrescar los conocimientos como para arrancar la nueva sesión con la seguridad de lo bien aprendido.
- Procura tener un cuaderno o papel de reciclaje a la mano para realizar operaciones y dibujos.
- Verifica las respuestas a los problemas y actividades consultando el Apéndice 1, pues hacerlo te dará seguridad para continuar trabajando. Confirmarás lo que has aprendido y te indicará si necesitas trabajar un poco más en el tema.
- La síntesis es una herramienta de construcción del aprendizaje. Te sugerimos que conforme avances en cada uno de los temas elabores una ficha de resumen de los conceptos, principios, procedimientos relacionados y sus ejemplos. Tus fichas serán un recurso de consulta, una especie de “acordeón”, que te resultará muy útil.
- Elabora una bitácora, como aquella que hiciste en la unidad 2 del módulo *De la información al conocimiento*. Además de reflexionar sobre tu aprendizaje respondiendo qué hiciste, cómo te sentiste al trabajar y qué aprendiste, registrarás situaciones de tu vida cotidiana de solución no evidente. Este proceso de identificación te permitirá aplicar los conceptos y procedimientos aritméticos que estudiarás ahora y será un insumo para la última actividad de la unidad.
- En el estudio de las matemáticas es importante contar con el apoyo de alguien que te auxilie a valorar tu aprendizaje y superar dificultades. Busca quién puede hacerlo en tu caso; puede ser un familiar o conocido que domine esta materia, o puedes recurrir a un asesor presencial o virtual. Averigua si hay un Centro de Servicio de Preparatoria Abierta cercano a ti o consulta la página de Internet de la Preparatoria Abierta en Línea para obtener asesoría virtual.
- Es fundamental que tengas acceso a una computadora conectada a Internet para buscar información y realizar prácticas adicionales. Éstas te servirán sobre todo si enfrentas dificultades para comprender los conceptos y procedimientos aritméticos considerados. Recuerda que si no tienes una computadora en casa puedes acceder a ella en un cibercafé, en casa de un familiar o amigo, un centro comunitario, una biblioteca pública o una escuela.
- También se te sugiere que tengas a la mano un fólder o carpeta donde archives tus ejercicios y fichas de resumen.

¿Comienzas ya?

INICIO

Los números reales: características y subconjuntos

Estás trabajando para resolver de manera creativa situaciones problemáticas, mediante las operaciones básicas con los números naturales, enteros, racionales y reales.

SESIÓN 1 ¿Y QUÉ INSUMOS SE REQUIEREN PARA MONTAR UN CIBERCAFÉ?

Claudia y Ángel, dos jóvenes universitarios, son un ejemplo de esas tantas personas que sueñan con tener un negocio. Desde que comenzaron a estudiar su carrera en la universidad, hace dos años, tienen la idea de emprender uno.

Viven en la colonia Vista Alegre y, después de oír la conversación entre varios de los amigos de sus hermanos que estudian la preparatoria, se dan cuenta que no hay un cibercafé cerca del plantel. La mayoría de los estudiantes carecen de computadora en su casa, pero viven en el mundo de la Tecnología de la Información y la Comunicación, y el uso del correo electrónico, Internet y los programas ofimáticos es una necesidad. Los universitarios reconocen en esa situación una oportunidad de negocio y empiezan a idear su proyecto de montar un cibercafé, un lugar donde se pueda acceder a Internet mientras se come un bocadillo y se toma café o un refresco. ¿Analizas con ellos la viabilidad de hacerlo?

1 Comienza por reconocer qué sabes acerca de “hacer” un negocio. Escribe lo que según tú es importante para abrir uno. Si lo requieres revisa las sugerencias en el Apéndice 1.

DESARROLLO

Después de visitar varios cibercafés con la idea de averiguar cómo operan, Ángel y Claudia se dan cuenta que se requieren equipos de cómputo.

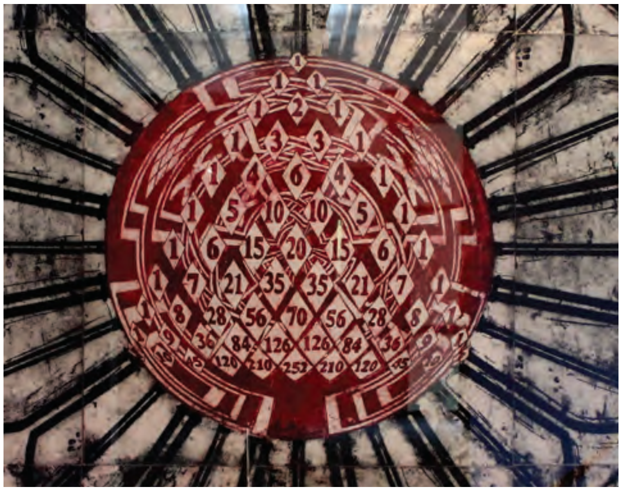
¿Qué consideras que deben hacer?, ¿tienes alguna idea de por dónde pueden empezar?, ¿qué herramientas requieren para ello? A continuación anota las ideas que vengan a tu mente.

¿Pensaste que lo primero que pueden hacer los jóvenes es pedir información a varios proveedores e investigar los costos del equipo para después conseguir precios bajos para adquirir el mismo? Claro, suena lógico. Pero también lo sería tener en mente qué cantidad de equipo adquirir, a qué costo y cómo conseguir el dinero para la compra.

PROBLEMA 1 Después de sus pesquisas, los jóvenes aspirantes a empresarios se dan cuenta que lo que tenían planeado invertir no es suficiente; contaban con \$45,000.00 de sus ahorros. Acuden a un banco donde se les explica que pueden acceder a un préstamo de un programa de apoyo a microempresarios de \$7,200.00 como monto máximo, y que si pagan \$3,400.00 a los tres meses de haber recibido el financiamiento se les condonarán \$300.00 de la deuda. Más aún, el promotor bancario les comenta que si abonan a la deuda \$2,200.00 a los dos meses del pago anterior podrán tener otros beneficios. ¿A cuánto consideras que ascendería entonces su deuda después del segundo pago?, ¿con cuánto dinero pueden contar

para arrancar su negocio?, ¿qué tipo de números conviene que utilicen en las operaciones?

¿Qué información requieres para comprobar a cuánto ascendería la deuda y con cuánto dinero contaban para iniciar su negocio? Lo primero que necesitas tomar en cuenta es que una deuda se refiere a una cantidad que no se posee y que es básico diferenciar de la que sí se tiene. Para comprender mejor esta afirmación se requiere que lleves a cabo diversas operaciones con diversos tipos de números. ¿Recuerdas cómo se clasifican éstos? Vayamos poco a poco.



Los números enteros positivos y negativos

Los primeros números que el ser humano utilizó para interpretar la realidad y cuantificarla fueron los **naturales (N)**, 1, 2, 3, 4, 5… sucesivamente hasta el **infinito**, y que se usan de forma cotidiana. Sin embargo, los números naturales positivos no se pueden aplicar a situaciones en las que tenemos que "quitar o restar", pues para ello las cantidades se representan como negativas. Al conjunto de números que incluyen los números negativos además de los positivos se le denomina **números enteros (Z)**.

Para saber más

"Se utiliza la palabra infinito (∞) para denotar algo muy grande, ilimitado, o imposible de contar. Pero el infinito va más allá de lo muy grande y de la posibilidad humana de contar. La noción de infinito como idea de algo ilimitado o inalcanzable ha provocado una fuerte confusión a través de la historia. Perturbó a los antiguos griegos, quienes trataron inútilmente de comprenderlo sometiendo el infinito a la intuición del sentido común, la cual, lamentablemente, estaba inspirada en un mundo finito y los condujo a conclusiones contradictorias y paradójicas". Texto tomado del artículo *El concepto de infinito* de José Ramón Ortiz, *Asociación Matemática Venezolana*, Boletín. Vol. I, núm. 2, Año 1994. <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol1/vol-1n2p59-81.pdf> [Consulta 13.12.2011].

Para trabajar la idea del concepto del infinito también puedes ver el video en el que el científico Carl Sagan hace una reseña del número googol y del googolplex. http://www.youtube.com/watch?v=MrC3qiBJ4NU [Consulta 14.12.2011].

Para saber más

En tiempos remotos los chinos utilizaron bastoncillos de bambú o de madera para representar los números y realizar, en especial, cálculos comerciales de una manera práctica. Esos bastoncillos eran negros o rojos según representaran cantidades positivas o negativas.

Los matemáticos indios del siglo VI también utilizaron números negativos para tratar este tipo de problema y fueron los árabes quienes dieron a conocer los números negativos de los indios en el mundo occidental. Durante el Renacimiento, el manejo práctico de esos números en la contabilidad y otros contextos ayudó a su lenta introducción en las matemáticas.

Fue el monje alemán Michael Stifel uno de los primeros en admitir el uso de coeficientes negativos para el estudio de las ecuaciones cuadráticas y divulgó el uso del signo menos "-" para designar la resta; de hecho, los signos + y - estaban ya en uso entre los comerciantes alemanes del siglo XV para indicar el exceso o el defecto de mercancías en los almacenes. Con todo, la consideración de las cantidades negativas como correspondientes a números matemáticamente legítimos alcanzó aceptación general hasta el siglo XVIII, cuando los números negativos empezaron a ser entendidos como opuestos de los positivos. En la matemática moderna el conjunto de los números enteros (Z) abarca todos los enteros, tanto negativos como positivos, y llega hasta el infinito hacia ambos lados de una recta numérica.

Tomado de: <http://www.profesorenlinea.cl/matematica/NumerosEnterosZ.htm> [Consulta 14.12.2011].

2 ¿Cuáles de los tipos de números hasta ahora explicados son de utilidad para resolver la primera situación que se plantearon los futuros empresarios y por qué lo consideras así?

Contrasta tu respuesta con la sugerida en el Apéndice 1.

SESIÓN 2 ¿CÓMO REPARTIR EL DINERO?

PROBLEMA 2 Seguros de que pueden obtener $7,200.00 para sumarlos a sus ahorros e iniciar el negocio, Ángel y Claudia analizan cómo repartir el dinero para contar con lo necesario y comenzar a dar servicio. Estudian las opciones y, en principio, deciden destinar $\frac{3}{5}$ del total para la compra de 4 computadoras y $\frac{1}{8}$ de lo que les sobre para adquirir una impresora. No pueden continuar la planeación sin saber de cuánto dinero disponen después del gasto en el equipo. Conozcamos

algunas formas de iniciar el estudio del tema y retomaremos más adelante este tema, para solucionarlo.

¿Se te ocurre alguna estrategia para solucionar esta situación que les inquieta?

Una forma de empezar la búsqueda de una estrategia de resolución es identificar si los números pertenecen al conjunto de números naturales o al de los enteros. Por lo que vimos hasta ahora, en apariencia no es así. $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{8}$ son parte de un nuevo subconjunto de los números reales, los **racionales**, aquellos que se expresan como el cociente, o división p/q, de dos números enteros p y q, y en los cuales q difiere de cero ($q \neq 0$). Además de expresarse como fracciones (17/8 o $\frac{17}{8}$), los números racionales también lo hacen como decimales 0.5, 2.33333, 7.5.

Gestión del aprendizaje

una fracción de la forma $\frac{p}{q}$ se entiende de la siguiente manera: el número de abajo (q) señala en cuántas partes se está dividiendo el entero; el número de arriba (p) indica cuántas partes de ese entero hay, y se lee "p sobre q".

glosario

Cociente: resultado que se obtiene al dividir una cantidad por otra.

La expresión decimal de un número racional puede ser exacta o periódica. Por ejemplo, el número 2/3 expresado en forma decimal, es periódico. Si dividimos 2 ÷ 3 obtenemos 0.666… El número 6 se repite hasta el infinito ya que el residuo se repite una y otra vez; y para el número 20/11, si dividimos 20 ÷ 11 obtenemos 1.818181…, en donde los dígitos 8 y 1 se repiten indefinidamente. En cambio, para $\frac{3}{5}$, dividimos 3 ÷ 5 y obtenemos 0.6; para $\frac{8}{5}$, la división que resulta da 1.6; en estas últimas divisiones se llega a un residuo igual a cero y la división se termina. ¡Corrobóralo realizando las divisiones que se mencionaron!

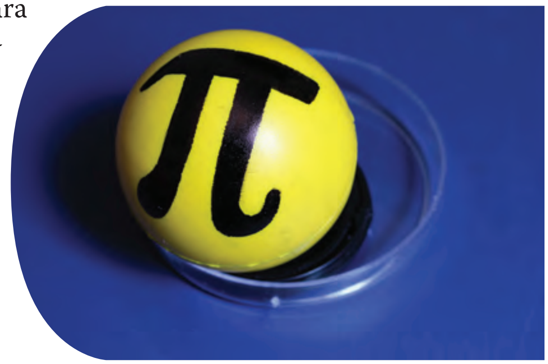
Todo número entero es un **número racional (Q)** pues lo podemos expresar como **cociente,** por ejemplo, el número 7 lo podemos escribir como $\frac{7}{1}$ pues resulta de dividir 7 ÷ 1 = 7.

SESIÓN 3 ¿CÓMO REUTILIZAR PARA AHORRAR?

PROBLEMA 3 Conforme Claudia y Ángel avanzan en el desarrollo de su planeación, se dan cuenta que el dinero se les puede agotar con facilidad y que sería conveniente tratar de reusar algunos materiales para ahorrar. ¿Lo has hecho tú en algunas situaciones similares?, ¿consideras que en el caso del montaje del cibercafé podría ser útil?, ¿qué se podría reutilizar? Acuden a lugares de acopio de muebles usados y encuentran mesas viejas y sin costo. Ello les da la idea de reusarlas para fabricar anaqueles. Miden una mesa cuya parte central es cuadrada y tiene 1 m de lado y 2 semicírculos adosados en lados opuestos. ¿Cómo saber si sirve para lo que la quieren?, ¿será conociendo el área que tiene?

Puede ser así, pero habría que obtener el área del cuadrado que constituye la parte central de la mesa y de los dos semicírculos que juntos forman un círculo completo y cuya área se obtiene mediante la fórmula $A = \pi r^2$ (área igual a Pi por radio al cuadrado). El número π (Pi) se obtiene de dividir el perímetro de la circunferencia entre su diámetro. ¿Pero has pensado a qué subconjunto de números corresponde Pi?, ¿a los naturales, a los enteros racionales? Pues sí, a un nuevo subconjunto, el de los **irracionales**.

Un número real irracional es aquel que no se puede escribir en fracción. Además en él los decimales se repiten sin presentar ninguna periodicidad. Un ejemplo de número irracional es π (Pi), cuyo valor es: 3.14159265358979323846264338327950..., aunque en general se usa 3.1416 para hacer los cálculos correspondientes.



Como podemos notar, en los números irracionales los decimales siguen hasta el infinito sin mostrar ningún patrón, se representan indefinidamente con expresiones decimales infinitas no periódicas, a diferencia de los racionales, que pueden representarse con expresiones decimales periódicas.

Los números racionales (enteros y fraccionarios o decimales) y los irracionales conforman el conjunto de los **números reales (R)**.

Para saber más

El concepto de **números reales** surgió a partir de la utilización de fracciones comunes por parte de los egipcios, cerca del año 1000 a.C. El desarrollo de la noción continuó con los aportes de los griegos, que proclamaron la existencia de los números irracionales.

Otra clasificación de los números reales puede realizarse entre **números algebraicos** (un tipo de número complejo) y **números trascendentes** (un tipo de número irracional).

Más información en...

Dos opciones de consulta en libros podrían ser: A. Odgers López (1975). *Los números reales*. México: Trillas. A. Villagómez (2010). *Aritmética y álgebra para bachillerato*. México: Cerezo Editores. Dos alternativas en páginas electrónicas: http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros y http://math2me.com

Actividad 3

Recapitula lo aprendido hasta ahora para identificar los datos y el cuestionamiento de un problema.

A. Para comenzar investiga más sobre el conjunto de los números reales y sus subconjuntos. Recurre a fuentes impresas o digitales, obtén la información y registra las ideas centrales en una ficha de síntesis o resumen.

B. Ahora lee cuidadosamente las siguientes situaciones para identificar los datos y las preguntas del problema. Después identifica qué tipo de números se utilizaría en su resolución y escribe en las líneas el tipo de número que consideras.

a) Liliana es vendedora de frutas y verduras en el mercado. Compra en la Central de abastos 18 kilos de aguacate a \$15.00 pesos el kilo y pretende obtener una ganancia de \$108.00. Identifica el tipo de números para saber con cuáles se podría llegar a la solución.

b) ¿Con qué números expresarías las temperaturas mínimas que se alcanzaron en la ciudad de Zacatecas en una semana cuando un día estuvo a 5 grados centígrados bajo cero, el siguiente a 3 grados centígrados bajo cero y el siguiente a 2 grados centígrados bajo cero?

c) Encontrar la edad de una persona es siempre un acertijo interesante. ¿Cuáles serían los números que se ocuparían para saber la edad de Julio si hace algunos años tenía 16 años, que corresponden a $\frac{3}{4}$ de su edad hoy?

d) ¿Cómo expresarías la ubicación de Angélica, Miguel y Rodrigo en un edificio de 6 pisos, si la primera está en el piso 1, el segundo en el sótano 1 y el tercero en el sótano 3?

e) A Eduardo le gusta andar en bici y pretende romper su propio récord, para ello entrena de manera incesante. El primer día recorre 125.75 kilómetros, al día siguiente 129.52 y el tercer día, 154.37; ¿con qué conjunto de números expresarías el resultado de sumar los kilómetros recorridos en el esfuerzo para romper su récord?

f) La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1^2 cm de longitud cada uno se obtiene sacando la raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

Corrobora tus respuestas en el Apéndice 1, si fueron acertadas continúa pero si no trabaja de nuevo el tema, hasta que lo hayas comprendido.

FICHERO

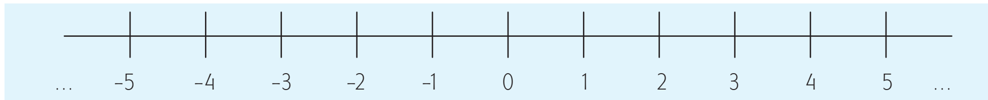
Reflexiona sobre lo hecho hasta ahora. Elabora tu primera ficha de resumen con lo aprendido sobre los números reales; considera la definición y ejemplos de los enteros, los naturales o enteros positivos, los enteros negativos, los racionales y los irracionales. Te permitirá obtener una breve conclusión del tema.

Comienza ahora la elaboración de tu bitácora; durante el día presta atención a los números que manejas y analiza: de qué tipo son. Registra la situación o problema con el cual se relacionan y fíjate qué haces con ellos. Las notas de tu bitácora te servirán para la actividad final de esta unidad. ¿Lograste comprender de manera total los subconjuntos de los números reales?

SESIÓN 4 ¿Con cuánto cuentan?

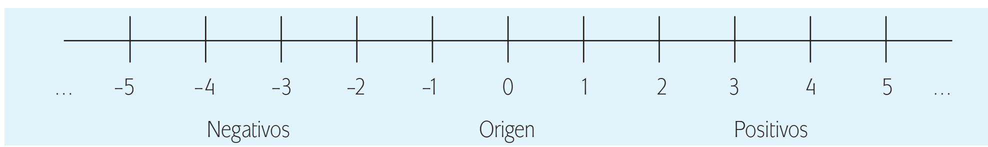
La recta numérica

La realidad es tan compleja que a lo largo de la historia, los matemáticos han generado conceptos abstractos para tratar de explicarla. Esa complejidad provoca que en ocasiones sea difícil la comprensión y sea necesario recurrir al auxilio de la representación visual del concepto. En el caso de los números reales esa visualización se hace por medio de una recta como aquella que tal vez usaste para aprender a sumar y restar cuando estabas en los primeros años de primaria. ¿Recuerdas los "saltos de la rana" sobre la recta? Pues esa regla equivale a la denominada **recta numérica**, aquella que se usa para representar geométricamente los números y las operaciones que se pueden hacer con ellos.



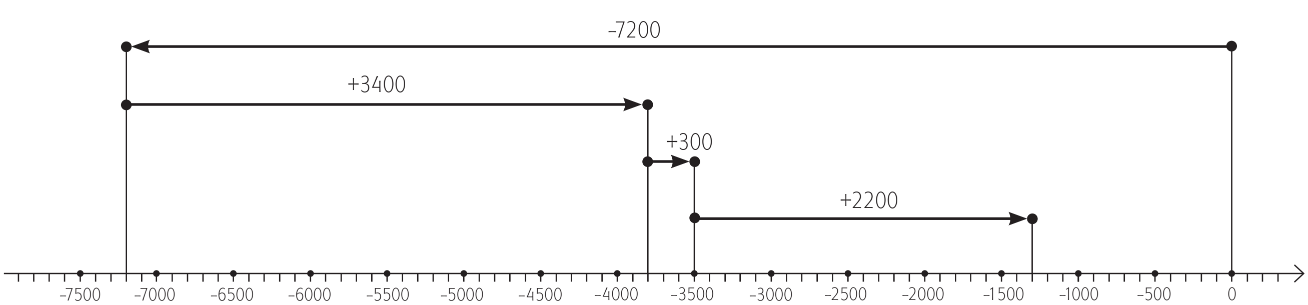
En ella los números enteros son como puntos que están separados de manera uniforme y ordenada. Se elige un punto arbitrario, denominado origen, que representa al 0 y un punto a la derecha que representa al 1. Los demás enteros se colocan tomando como unidad la distancia entre 0 y 1.

Para trabajar en la recta, los números enteros se ordenan de menor a mayor valor a partir del origen. Así, los números que están a la izquierda de un entero son menores a él y los que están a la derecha mayores a él. Dados dos números enteros a y b, únicamente puede ocurrir una de las siguientes tres posibilidades, $a = b$ (a es igual a b), $a< b$ (a es menor que b) o $a > b$ (a es mayor que b).



Hasta ahora es claro que la recta numérica se usa para localizar visualmente los números y entender su valor con respecto a un punto de origen. Sin embargo la recta también es útil cuando se intenta entender cómo se transforman los números al realizar operaciones. Retoma la situación del problema 1, el préstamo que Ángel y Claudia requieren para la compra del equipo, para aclarar lo anterior. Sabemos que los jóvenes acudieron a un banco donde se les otorgó un préstamo de un programa de apoyo a microempresarios por $7,200.00, y que si pagan $3,400.00 a los tres meses de haber recibido el financiamiento se les condonarán $300.00 de la deuda. Más aún, el promotor bancario les comenta que si abonan a la deuda $2,200.00 a los dos meses del pago anterior podrán tener otros beneficios.

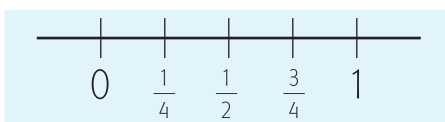
La resolución de las operaciones que se tienen que hacer para saber a cuánto ascendería la cantidad que deben se puede conocer si se utiliza la recta numérica. Veamos pues la representación.



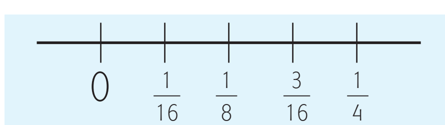
¿Según lo que ves en la recta puedes dar una cifra aproximada? Por lo pronto es claro que deben una cantidad entre \$1,000.00 y \$2,000.00 pesos. Lo mismo podemos calcular con el dinero que tienen disponible, los \$45,000.00 de sus ahorros más los \$7,200.00 que obtuvieron de préstamo menos lo que ya decidieron utilizar, $\frac{3}{5}$ del total para la compra de 4 computadoras y $\frac{1}{8}$ de lo que les sobre para adquirir una impresora, como lo planteamos antes.

Además de los números enteros es posible representar otros conjuntos de números. En la representación de los números racionales se establece que a cada punto de la recta le corresponde un número racional único. De manera recíproca a cada número racional le corresponde un único punto de la recta, dependiendo de la magnitud del número y la distancia que concierne a esta magnitud a partir del cero.

Entre cada dos números enteros es posible colocar un infinito de números, tanto racionales como irracionales. Por ejemplo, entre el 0 y el 1 podríamos colocar los números $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ entre otros.



Así, entre cualesquiera dos números racionales, existe una cantidad infinita de números, por lo tanto, siempre podemos encontrar un número entre cualquiera otros dos; por ejemplo, entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ iría $\frac{1}{3}$; y entre $\frac{3}{4}$ y 1 iría $\frac{4}{5}$, y así sucesivamente; podríamos colocar una cantidad infinita de números racionales. Si ahora dibujamos con mayor amplitud el intervalo entre 0 y $\frac{1}{4}$, entonces se puede colocar otros números racionales intermedios, tal y como se muestra a continuación:



Representa en una recta numérica los siguientes números para comprender su significado mediante su representación gráfica. Primero coloca el cero y avanza a partir de éste la cantidad que se indica, en el sentido adecuado según el signo.

a) $\frac{7}{4}$ 

b) $\frac{2}{3}$ 

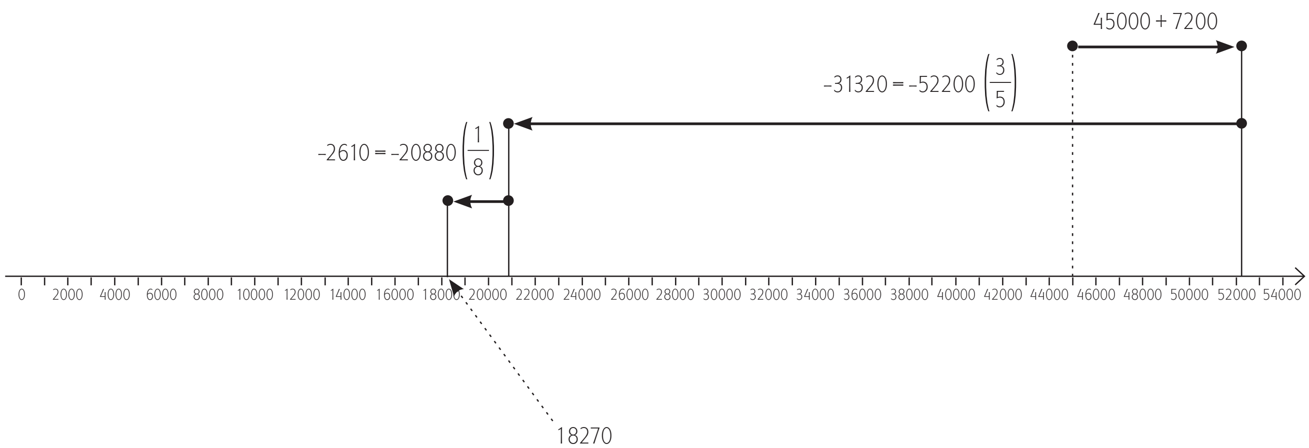
c) $\frac{-5}{4}$ 

d) 4.5 

e) –2 

No olvides corroborar tus respuestas en el Apéndice 1.

Además, entre dos números racionales hay una cantidad infinita de números irracionales, pues todos los racionales, aunque son un infinito de números, dejan “huecos” en la recta, en los cuales se encuentran los números irracionales. Lo anterior se observa al resolver el problema 2 de Ángel y Claudia (véase la p.23) para analizar la distribución del dinero después de destinar $\frac{3}{5}$ del total para la compra de computadoras y $\frac{1}{8}$ de lo que les sobre para adquirir una impresora por medio de una recta numérica. Veámoslo ahora en una recta numérica. Primero identifica el dinero recibido, después lo que gastaron y por último trabajemos en la recta para identificar cuánto tienen disponible después de adquirir las computadoras y la impresora, y así entender cuánto gastaron y saber cuánto tienen.



¿Consideras que auxiliarte con la recta numérica te puede servir al trabajar operaciones con números? Qué tal si ahora practicas el uso de la recta con el siguiente problema, sin olvidar que cada valor representa una distancia que se recorre a la derecha o a la izquierda dependiendo si el número es positivo o negativo.

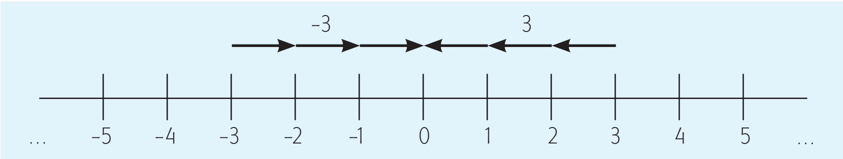
5 Mario es vigilante de un edificio con 14 niveles, 10 pisos y 4 sótanos. Hace recorridos continuos usando el elevador y sin un patrón establecido. Ayer comenzó en la planta baja, luego bajó 2 pisos, subió 7, después volvió a subir 3 pisos, descendió 9 y terminó bajando 1. ¿Cómo saber en qué piso se encontraba al finalizar el recorrido? ¡Prueba también con una regla vertical!

No olvides verificar tu respuesta en el Apéndice 1; si es correcta quiere decir que ya entendiste claramente el punto, si no, repite el estudio y haz con detenimiento los ejercicios propuestos.

SESIÓN 5 ¿LAS COSAS SE SUMAN RESTANDO, SE RESTAN SUMANDO, O QUÉ ONDA?

Valor absoluto

Para hacer operaciones con los números, en ocasiones solamente, se requiere conocer su valor, sin importar si es positivo o negativo. Para hacerlo piensa en una persona que entra a un edificio por la planta baja y luego baja 3 pisos, al mismo tiempo entra otra persona a la planta baja y sube 3 pisos. En ambos casos, la persona camina 3 pisos. Si el interés recae en saber la distancia recorrida, sin importar en qué sentido lo hizo, entonces el valor es el mismo (3) y se le denomina **valor absoluto**. Entonces, éste representa la distancia que hay del 0 a un número inverso. La distancia del la planta baja al tercer piso es 3; asimismo, la distancia al sótano 3 también es 3; aunque tienen un sentido de la planta baja, como se muestra en la figura.



Más información en...

http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/conmates/unid-3/valor_absoluto.htm y en http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/valor-absoluto.html

El valor absoluto de cualquier número real diferente de cero siempre es positivo y cuando se considera el valor absoluto se representa mediante dos barras verticales que encierran al número, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Valor absoluto es simplemente la **distancia** que hay de un número al cero: $|5| = 5$, $|-5| = 5$. Tanto el 5 positivo como el 5 negativo están a "5" del cero. $|-8| = 8$, $|8| = 8$, $|0| = 0$, $|-6.2| = 6.2$, $|6.2| = 6.2$.

Actividad 6

A. Conecta con una línea cada uno de los números de la primera columna con su correspondiente valor absoluto en la segunda columna:

$\|-3.5\|$	3
$\|14\|$	-14
$\|3\|$	-3
$\|-3\|$	3.5
$\|-14\|$	14

B. Lee con atención las siguientes situaciones para identificar los datos que brindan para su resolución.

a) La temperatura bajó de 0 grados centígrados a –7 grados centígrados, ¿cuántos grados varió?

b) Luis bajó del piso 8 al piso 3, ¿cuántos pisos se desplazó?

c) Julia debía $4,600.00 el mes pasado y ahora debe $7,300.00, ¿cuánto se incrementó la deuda?

FICHERO

No olvides elaborar una ficha de resumen sobre la recta numérica y el valor absoluto para que la puedas consultar de manera fácil. También continúa la elaboración de la bitácora respondiendo a las tres preguntas básicas: ¿qué hiciste, cómo te sentiste y qué aprendiste?, y guarda ambos documentos para que los puedas utilizar más adelante.

Revisa tus resultados contra los que vienen en el Apéndice 1, ello te permitirá avanzar con mayor seguridad.

SESIÓN 6 ¿SÓLO SUMAS CUANDO SUMAS?

Operaciones con números reales

Suma

Revisemos el problema 1 por partes.

a) Claudia y Ángel tienen ahorrados $45000 pesos

FICHERO

Conforme estudias esta sección ve preparando un resumen de las principales reglas de cada operación. Es probable que varias de ellas ya las hayas estudiado en secundaria. Identifica aquellas que ya dominas y repásalas. Presta especial atención a las que no recuerdas o no conocías: anótalas en tus propias palabras de manera simplificada. Tus notas te servirán como punto de partida para elaborar la ficha resumen.

que invertirán en un cibercafé; como no les alcanza, pedirán prestado $7,200.00 más. ¿A cuánto asciende lo que invertirán en el negocio?

b) Ángel y Claudia pidieron un préstamo al banco para completar lo que necesitaban para comprar equipo. En consecuencia contrajeron una deuda de $7,200.00; tres meses después pagaron $3,400.00 de la deuda; les dedujeron $300.00 de la deuda, luego pagaron otros $2,200.00. ¿Cuánto les queda por pagar?

c) Descontando lo pagado a lo que tenían, ¿cuánto les queda?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¡Detente y reflexiona! ¿Qué operaciones matemáticas necesitas realizar para resolver el problema 1?

____

____

Las operaciones que requerimos son la suma y la resta, por lo que comenzaremos por explicar la manera correcta de efectuarlas con los números reales.

La **suma** o **adición** de dos números de igual signo se realiza sumando sus valores absolutos y poniendo al resultado el signo común. Por ejemplo:

$$3 + 7 = 10; -4 - 9 = -13.$$

El signo + puede omitirse en los números positivos cuando se encuentran al inicio, como con los casos del tres y el diez del primer ejemplo anterior. Cuando sumamos un número negativo debemos colocar siempre el signo menos, como en el menos cuatro y menos nueve del segundo ejemplo anterior ($-4 - 9 = -13$).

La suma o adición de dos números con signo diferente se realiza efectuando una resta de los valores absolutos de ambos números y al resultado se le antepone el signo del número que tenga mayor valor absoluto.

$$8 + -15 = 8 - 15 = -7$$
$$-4 + 10 = 6$$
$$21 + -16 = 21 - 16 = 5$$

Resta

La **resta** o **sustracción** puede expresarse en términos de la suma, puesto que, en general, podemos verla como una suma de números con signo diferente, como en el último de los ejemplos anteriores, que puede verse como la suma de dos enteros 21 y – 16; o como la resta de dos naturales, 21 y 16 = 5. Observa que esta última es la resta que ya conoces, 21 – 16 = 5.

Ahora bien, la operacion de restar un número negativo será equivalente a la de sumar un número positivo (– – = +).

$$14 - -9 = 14 + 9 = 23$$
$$6 - -5 = 6 + 5 = 11$$

Un caso puede ser el siguiente: los costos de un horno de microondas, una lavadora de platos y un refrigerador son $1,300.00, $5,590.00 y $3,920.00 respectivamente. Ángel y Claudia han pensado gastar $10,000.00 en adquirirlos para el cibercafé, ¿podrán comprar los tres artículos?, o en otro caso, ¿cuanto más de lo que habían pensado tendrán que gastar?

¿? Asesoría

Recuerda que los términos que intervienen en una resta $a - b = c$ se llaman:

- a, *minuendo*, que es el número al cual le restamos una cantidad
- b, *sustraendo*, la cifra restada
- c, *diferencia*, que es el resultado

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué operaciones debemos realizar? ¿De qué manera aplicamos las propiedades de la suma y resta?

El costo de los tres artículos se obtiene sumando los tres precios: 1300 + 5790 + 3920 = 11010. Por lo tanto no les alcanzará para comprar los tres articulos con \$10,000.00 Para poder comprarlos todos, la cantidad de dinero que les falta se obtiene efectuando una resta, a lo que tienen pensado gastar le restan lo que cuesta y así obtienen el monto de lo que les falta: 10000 – 11010 = –1010; les faltan \$1010.

Actividad 7

A. Encierra en un círculo el resultado correcto de las siguientes operaciones:

a) 24 – 49 =	–73	–25	25	73
b) –37 – 45 =	–72	–82	–8	28
c) 15 – –22 =	37	–37	7	–7
d) –2 – –19 =	–17	–21	21	17
e) |–6 – 18| =	12	–24	24	22

B. Resuelve los siguientes problemas aplicando las propiedades de la suma y la resta:

a) El papá de Ángel nació en el año de 1954, se casó a los 26 años, 3 años después nació Ángel y murió cuando éste tenía 21 años. ¿En qué año murió?

b) El encargado de la bodega de café que les surtirá a Claudia y Ángel espera un cargamento de 20,000 kilos de café, que le llegarán en varias entregas, con diferencia de 15 días cada una. En la primera le llegarán 5,400 kilos, en la segunda 700 kilos más que en la primera entrega. Más tarde lo harán 340 kilos más que en la segunda entrega. Sin embargo, para surtirles tiene que entregar primero 13,600 kilos que ya había comprometido, ¿cuántos kilos de café faltan por llegar, y en qué momento llegará el cargamento con el que les podrá surtir?

¿Dominas la suma y la resta? Verifica tus respuestas en el Apéndice 1 para asegurarte de ello y poder avanzar.

Ahora resolvamos el problema 1. ¡Intenta resolverlo primero, antes de que revises las operaciones propuestas!

Para resolver este problema se requiere utilizar las reglas para la suma y resta de números enteros.

a) Claudia y Ángel tienen ahorrados 45,000.00 pesos que invertirán en un cibercafé; como no les alcanza, pedirán prestado 7,200.00 más. ¿A cuánto asciende lo que invertirán en el negocio? Para resolver esta primera parte del problema debemos sumar las cantidades que tenemos, 45000 + 7200 = 52200.
b) Ángel y Claudia pidieron un préstamo al banco para completar lo que necesitaban para comprar equipo. En consecuencia contrajeron una deuda de $7,200.00; tres meses después pagaron $3,400.00 de la deuda; les dedujeron $300 de la deuda, luego pagaron otros $2,200.00. ¿Cuánto les queda por pagar? Recuerda que las deudas son números negativos y los abonos, números positivos:
$-7200 + 3400 + 300 + 2200 = -1300$.
c) Descontando lo pagado a lo que tenían, ¿cuánto les queda? Al total del dinero con el que contaban hay que deducir lo que han pagado, sin considerar lo que les dedujeron del saldo, pues eso no fue un desembolso de ellos:
$52200 - (3400 + 2200) = 46600$.

SESIÓN 7 ¿Y SE PUEDE SUMAR DE MANERA ABREVIADA O MÁS RÁPIDA?

Multiplicación

PROBLEMA 3 Claudia y Ángel quieren comprar las provisiones de café. De acuerdo a lo que han investigado acerca del negocio, saben que lo idóneo es que el café esté fresco, por lo que no es recomendable almacenarlo por más de 30 días. Estiman que requerirán café para 100 tazas al día, y que cada taza requiere en promedio 10 gramos de café, ¿cuántos kilos de café deberán comprar para tener suficiente para ese periodo? Una caja de café tiene 15 bolsas. Si cada bolsa pesa 0.675 kilogramos, ¿cuál es el peso total de café por caja? ¿Cuál es la cantidad idónea de café que deben almacenar?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué operaciones debemos realizar?

____

____

Pues sí, seguramente respondiste que para resolver este problema debemos utilizar la multiplicación. Primero debemos multiplicar el número de tasas diarias por el número de granos y luego debemos multiplicar el peso de cada bolsa por el número de ellas, y después por el número de cajas.

La **multiplicación** o **producto** de 2 números reales de igual signo siempre dará como resultado un número positivo. $+ \times + = +$, $- \times - = +$.

$$6 \times 8 = 48$$
$$-7 \times -3 = 21$$

La multiplicación o producto de 2 números reales de distinto signo dará como resultado un número negativo. $+ \times - = -$, $- \times + = -$.

$$5 \times -7 = -35$$
$$-9 \times 6 = -54$$

¿En qué otros contextos se utilizan las multiplicaciones? Analiza el siguiente problema:

Ángel y Claudia han organizado en la comunidad donde viven a 23 familias para reforestar los terrenos que rodean la zona, como parte de un programa de concientización ecológica y de darse a conocer en la misma comunidad. Participarán cuatro miembros de cada familia, y cada persona plantará 13 árboles. ¿Cuántos arboles se plantarán? Claudia y Ángel han ofrecido donar un café o media hora de Internet por cada árbol, ¿a cuánto tiempo o cuántos cafés asciende el total que podrían regalar si todos cumplen como se comprometieron en la jornada de reforestación?

Este es el tipo de problema que requiere de utilizar la multiplicación. Debemos multiplicar el número de árboles que plantará cada miembro de la familia, por el número de miembros de cada familia, por el número de familias.

Cada persona plantará 13 árboles y hay 4 personas por familia, por lo tanto, debemos multiplicar 13 × 4 = 52 árboles por familia. Además participarán 23 familias, por lo que debemos multiplicar 52 × 23 = 1196 árboles se plantarán, mismo número de cafés que regalaran si todos cumplen.

El nivel del agua de una presa ha disminuido 9 cm diarios durante 5 días, ¿cuál ha sido la reducción total en el nivel del agua de la presa en esos días?

En este problema debemos multiplicar –9 × 5 = –45. Ha disminuido 45 cm.

Ahora resolvamos el problema 3. Recuerda que Claudia y Ángel saben que lo idóneo es que el café esté fresco, por lo que no es recomendable almacenarlo por más de 30 días. Estiman que requerirán café para 100 tazas al día, y que cada taza requiere en promedio 10 gramos de café, ¿cuántos kilos de café deberán comprar para tener suficiente café para ese periodo? Una caja de café tiene 15 bolsas. Si cada bolsa pesa 0.675 kilogramos, ¿cuál es el peso total de café por caja?, ¿cuál es la cantidad idónea de cajas de café que deben almacenar?

Para resolver la primera pregunta debemos multiplicar el número de tazas de café que piensan servir cada día por el peso del café que requiere cada taza; ello nos dará el total de café por día. Después multiplicamos esa cantidad por 30, que es el número de días que quieren tener como almacén. Recuerda que para que puedas realizar operaciones debes tener los conceptos en la misma medida, por lo que hay que convertir los gramos a kilos.

Si piensan que para cada taza que sirvan requieren 10 gramos de café, ello significa que requieren 0.010 kg de café por taza. Entonces: 0.01 × 100 = 1 kilo de café al día, por 30 días, 30 kilos de café es lo que requieren adquirir sin que pierda el aroma o el sabor al servirlo.

Siguiendo con la solución, si cada caja tiene 15 bolsas y cada bolsa pesa 0.675 kilogramos, cada caja contiene: $15 \times 0.675 = 10.125$ kilos de café; para adquirir 30 kilos de café requieren entonces 3 cajas, con lo que tendrán aproximadamente la cantidad de café para 30 días.

Las operaciones con números reales cumplen una serie de propiedades que debemos conocer para utilizarlas cuando sea necesario. Por ejemplo, para abreviar algunos cálculos, o para saber, según la operación, cuáles procedimientos se pueden seguir, y cuáles no.

Actividad 8

Investiga por tu cuenta en Internet o en alguna biblioteca acerca de las *propiedades* de la suma y las de la multiplicación, y responde las siguientes preguntas intentando usar tus propias palabras. Anota un ejemplo de la aplicación de cada propiedad.

- ¿Qué dice la **propiedad conmutativa** de la suma?

- ¿Qué dice la **propiedad asociativa** de la suma?

- ¿Qué debe cumplir el **neutro aditivo** de los números reales?

- ¿Qué debe cumplir el **inverso aditivo** de un número real?

- ¿Qué dice la **propiedad conmutativa** del producto?

- ¿Qué dice la **propiedad asociativa** del producto?

- ¿Qué dice la **propiedad distributiva** del producto con respecto a la suma?

- ¿Qué debe cumplir el **neutro multiplicativo** de un número real?

- ¿Qué debe cumplir el **inverso multiplicativo** de un número real?

Consulta el Apéndice 1 para revisar tus respuestas y asegúrate que has encontrado y entendido cada una de las propiedades de la suma y la multiplicación, y el procedimiento para su aplicación.

SESIÓN 8 PRIMERO LO PRIMERO, ¿PERO QUÉ VA PRIMERO?

Seguramente al resolver problemas como los anteriores te encuentras que hay muchas operaciones por realizar, y te preguntarás, ¿qué se hace primero? Por ello es importante recordar la jerarquía de las operaciones, que nos indica que debemos realizar primero las operaciones que están dentro de un paréntesis; en caso de tener varias operaciones en el mismo paréntesis debemos calcular primero las potencias y raíces, luego los productos y cocientes y, ya al final, las sumas y restas. Una vez hechas las operaciones dentro de los paréntesis hacemos las restantes, pero siguiendo la misma jerarquía u orden.

Detengámonos un momento a ver cómo se aplican estas reglas. Con las operaciones que hemos revisado y utilizando correctamente las reglas de la jerarquía de las operaciones y el uso del paréntesis, realicemos la siguiente operación:

$-7 \times (2 - 5 \times (-9 + 4)) + 4 =$

$-7 \times (2 - 5 \times (-5)) + 4 =$

$-7 \times (2 + 25) + 4 =$

$-7 \times (27) + 4 =$

$-189 + 4 = -185$

En la operación que estamos analizando tenemos dos paréntesis, uno dentro de otro, por lo tanto debemos comenzar realizando la operacion "interna", que es la suma de -9 y $+4$.

$-7 \times (2 - 5 \times (-9 + 4)) + 4 = -7 \times (2 - 5 \times (-5)) + 4 =$, porque $-9 + 4 = -5$

A continuación debemos realizar la multiplicación del -5 con el -5. Observa que tenemos dos operaciones en el mismo paréntesis: una resta y una multiplicación, pero por las reglas de la jerarquía de las operaciones comenzamos por la multiplicación.

$-7 \times (2 + 25) + 4 =$, porque $-5 \times -5 = 25$

Ahora podemos ejecutar la suma que queda dentro del paréntesis:

$-7 \times (27) + 4 =$, porque $2 + 25 = 27$

Nos quedan dos operaciones por realizar, una multiplicación y una suma. Efectuamos primero la multiplicación y finalmente realizamos la suma.

$-189 + 4 = -185$, porque $-7 \times 27 = -189$

Como puedes observar, las propiedades que has estudiado te permiten saber cómo realizar varias operaciones relacionadas entre sí. Es muy importante que realmente las comprendas y las interiorices. ¡Las aplicarás de manera constante para realizar cálculos en éste, en los demás cursos de matemáticas y en la vida diaria!

¿Recuerdas el problema 3?

En éste, Ángel y Claudia quieren reutilizar la madera de una mesa vieja para hacer otro mueble. La superficie de la mesa está formada por una parte central cuadrada de 1 metro de lado y 2 semicírculos adosados en 2 lados opuestos, con ese diámetro; ¿cuál es el área?

Para comprender mejor el problema, ayúdate elaborando un dibujo con la forma de la mesa:

¿? Asesoría

¿Recuerdas lo que son las potencias y raíces? Por ejemplo, elevar un número al cuadrado es una potencia: n^2; sacarle raíz cuadrada a un número: $\sqrt{n}$ es una raíz. No te preocupes si no recuerdas bien estas operaciones, pues las estudiarás más adelante. Por ahora, solo fíjate que tienen el primer lugar en la jerarquía de operaciones, y ello quiere decir que son las primeras que tienes que resolver si están dentro de un paréntesis.

Para obtener el área total debemos sumar la del cuadrado más la de los dos semicírculos. Esta última equivale al área de un círculo completo, pues tenemos dos mitades del círculo. En este problema se requiere utilizar la jerarquía de las operaciones. Recuerda que el área del cuadrado es igual a la medida del lado elevada al cuadrado, o sea 1 al cuadrado. Además recuerda que el área de un círculo se obtiene multiplicando π por el radio al cuadrado. El radio corresponde a la mitad del diámetro, y en este caso mide 0.5 metros.

El área de la mesa es: $A = 1^2 + \pi \times (0.5)^2$.

De acuerdo con la jerarquía de las operaciones debemos realizar primero las potencias, luego la multiplicación y al final la suma.

Efectuamos las potencias: $A = 1^2 + \pi \times (0.5)^2$.

$A = 1 + (3.1416 \times 0.25)$

$A = 1 + 0.7854$

$A = 1.7854$ m^2. ¿Qué uso le darías a esa superficie?

SESIÓN 9 ¿Y CUÁNTO CABE AQUÍ?

Operaciones con valor absoluto

En algunas ocasiones nos veremos en la necesidad de efectuar una serie de operaciones dentro de las barras de valor absoluto. Entonces realizaremos primero la operación entre las barras y del resultado de ésta encontramos el valor absoluto. Por ejemplo:

$$|-12 + 4| + 5 - 2 = |-8| + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$|-6 \times 7| \times 5 + 10 = |-42| \times 5 + 10 = 42 \times 5 + 10 = 210 + 10 = 220$$

Como en otros temas de las matemáticas, habrá que realizar operaciones que parecen un poco repetitivas, pero es indispensable para que el cerebro “aprenda” a realizarlas, por ello te proponemos: ¡ejercítate!

Actividad 9

Encierra en un círculo el resultado correcto de las siguientes operaciones:

A. $2 - 4 \times \lvert 3 - 12 \rvert =$	−34	38	−36	−38
B. $-6 - 5 \times (-3 - 7 \times (-2)) =$	−49	28	−28	−61
C. $-8 \times (3 - 9 \times \lvert -4 \rvert) + 17 =$	−245	281	−247	247

¡No olvides revisar tus respuestas en el Apendice 1! Los errores son una excelente oportunidad para aprender, aunque estamos seguros que lo habrás resuelto correctamente.

División

PROBLEMA 4 Ángel y Claudia han encontrado un local ideal para adaptar en éste el cibercafé, sin embargo se requiere acondicionarlo, cambiar el piso y pintar las paredes. Un pariente de Ángel les prestará el dinero, con la condición de que le paguen 50 pesos diarios hasta terminar de cubrir el préstamo. Arreglar el local les costará $9,850.00. Si comienzan a pagar el 14 de marzo, ¿en qué fecha terminarán de pagar al pariente de Ángel?

Para resolver este problema debemos utilizar la división, pues se trata de saber cuántas veces cabe 50 (que será el pago diario) en $9,850.00 (que es lo que necesitan juntar con su ahorro diario para pagar el préstamo), ¿no es así? Eso nos dará la información sobre el número de días que deberán pagar. Después habrá que buscar la fecha en la que se cumplirá ese número de días.

La **división** o **cociente** es la operación inversa de la multiplicación y consiste en averiguar cuántas veces un número (**divisor**) está contenido en otro número (**dividendo**).

Si divides 20 (dividendo) entre 5 (divisor), el resultado es 4 (**cociente**), porque $20 \div 5 = 4$; $4 \times 5 = 20$.

Para dividir números para los que la división no es exacta se utiliza el **algoritmo** de la división, que se explica a continuación mediante un ejemplo. ¿Recuerdas las divisiones con la famosa “casita” que usábamos para dividir?, con el uso de las calculadoras muchos de nosotros hemos dejado de utilizarlo. ¡Revisémoslo!

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué operaciones debemos realizar?

____

____

glosario

Algoritmo: una secuencia de instrucciones que representan un modelo de solución para determinado tipo de problemas, o un conjunto de instrucciones que realizadas en orden conducen a obtener la solución de un problema.

Si queremos dividir 3,465 entre 129, colocamos al dividendo, 3,465, dentro de un semirectángulo (“la casita”), y al divisor afuera, como se muestra en la figura:

$$\begin{array}{rl} 129 & \overline{)3465} \end{array}$$

Se toman del dividendo solamente los números necesarios para que “quepa” el divisor. En este caso tomo 346, 129 cabe 2 veces. Pongo un 2 encima del 6 y multiplico 2 por 129. El resultado lo coloco debajo de 346 para restárselo. Resto:

$$\begin{array}{rr} & 2 \\ 129 & \overline{)3465} \\ & \underline{-258} \\ & 88 \end{array}$$

El 5 que queda en las unidades lo coloco al lado del 88 y obtengo 885. 129 cabe 6 veces en 885. Pongo un 6 encima del 5 del dividendo y multiplico 6 por 129. El resultado lo coloco debajo de 885 para restárselo.

$$\begin{array}{rr} & 26 \\ 129 & \overline{)3465} \\ & \underline{-258} \\ & 885 \\ & \underline{-774} \\ & 111 \end{array}$$

¡Terminé! Al resultado se le llama **cociente** y a lo que sobró se le llama **residuo**.

$$\begin{array}{rrl} & 26 & \longleftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \longrightarrow 129 & \overline{)3465} & \longleftarrow \text{dividendo} \\ & \underline{-258} & \\ & 885 & \\ & \underline{-774} & \\ & 111 & \longleftarrow \text{residuo} \end{array}$$

Recuerda que si tenemos decimales en el divisor debemos quitar el punto decimal del mismo, para lo que debemos desplazar el punto del dividendo (si lo hay) tantos lugares a la derecha como cifras decimales tenga el divisor. Si no hay decimales en el divisor, o no los suficientes, se añaden ceros.

Ejemplos:

$$8.2\,\overline{)23.45} = 82\,\overline{)234.5}$$

$$6.32\,\overline{)45.6} = 632\,\overline{)4560}$$

Después se procede a realizar la división subiendo el punto decimal al cociente, en el mismo lugar en el que se encuentra en el dividendo.

La división entre cero no está definida. Por ejemplo, $6 \div 0$ no tiene solución porque no existe ningun número real que multiplicado por 0 sea igual a 6.

La división puede interpretarse en términos de la multiplicación a partir del **inverso multiplicativo** del divisor. Por ejemplo, dividir entre 8 equivale a multiplica por $\frac{1}{8}$.

Lee el siguiente problema y analízalo:

Si una persona vive en promedio 70 años y usa Internet 3 horas diarias, ¿cuántos años de su vida se la pasa en la Red?

Recuerda que un día tiene 24 horas. Entonces una persona que está en Internet 3 horas diarias ocupa en ello $\frac{1}{8}$ parte del día, pues $24 \div 3 = 8$. Si esa persona vive 70 años, entonces está en la red $\frac{1}{8}$ de su vida, $70 \cdot \frac{1}{8} = \frac{70}{8} = 8.75$. La persona estará en la red 8.75 años durante todos sus 70 años de vida.

Las reglas de los signos se aplican del mismo modo que en la multiplicación.

Ejemplos:

$$-36 \div 4 = -9$$

$$40 \div -5 = -8$$

$$-28 \div -7 = 4$$

¿? Asesoría

El inverso multiplicativo de un número x, es el número que multiplicado por x da como resultado 1. Se denota como $\frac{1}{x}$. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de 2 es $\frac{1}{2}$; el inverso multiplicativo de ab es $\frac{1}{ab}$

SESIÓN 10 ¿SEGURO QUE CABE?

De nuevo es momento de practicar para poder hacer propios los conocimientos que vamos adquiriendo. ¡Ejercítate!

Actividad 10

A. Resuelve las siguientes operaciones cuidando de usar adecuadamente las reglas de los signos:

a) $24 \div -8 =$ __________

b) $-120 \div 10 =$ __________

B. Soluciona las siguientes situaciones:

a) El coche de Jorge recorrió 584.3 kilometros en 5 horas y media, ¿a qué velocidad circula su coche?

b) Si un taxi trabaja de lunes a viernes haciendo un recorrido de 300 kilómetros todos los días, ¿en cuántas semanas llegará a 150,000 kilómetros?

Contrasta tus resultados con los del Apéndice 1.

Respondamos ahora el problema 4. Recuerda que Claudia y Ángel se proponen ahorrar $50 diarios para pagar el arreglo del local, que les costará $9,850.00. Si comienzan el 14 de marzo, ¿en qué fecha tendrán todo el dinero que necesitan?

Debemos comenzar por dividir 9,850 entre 50 para encontrar el número de días que tardarán en juntar el dinero: 9,850 ÷ 50 = 197 días. Si empiezan a juntar el dinero el 14 de marzo y marzo tiene 31 días, juntarán durante 18 días de marzo; más 30 de abril, 48 días; más 31 de mayo, 79 días; más 30 de junio, 109 días; más 31 de julio, 140 días; más 31 de agosto, 171 días. Si sumamos los 30 días de septiembre, nos pasamos de los 197, entonces restamos 197 – 171 = 26, por lo que ahorrarán 26 días de septiembre, es decir, hasta el 26 de septiembre. Ese día habrán terminado de pagar al pariente que les prestó para arreglar el local.

SESIÓN 11 ¿Y PARA MULTIPLICAR MÁS RÁPIDO?

Potenciación

Estás trabajando para resolver de manera autónoma problemas que impliquen la aplicación de las propiedades de los exponentes y de la igualdad.

PROBLEMA 5 Claudia y Ángel han estado investigando con los posibles proveedores de los productos que necesitarán para abastecer el negocio. Averiguan que el camión que los puede proveer de galletas les llevaría cajas grandes que contienen cada una 12 cajas más pequeñas y que, a su vez, cada una contiene 12 cajitas con 12 bolsas; y cada bolsa contiene 12 galletas cada una. ¿Cuántas galletas les dejaría en total? Consideran que requerirán el doble de galletas que de cafés que vendan, ¿les alcanza con una caja?

Para resolver este problema aparentemente de forma más sencilla debemos multiplicar varias veces por 12. Esa operación les daría el número de galletas que contiene cada caja.

Pero hay otra forma más fácil de realizar el cálculo, lo que se conoce como elevar a la **potencia**, y que es el resultado que se obtiene al multiplicar un número dos o más veces por sí mismo. En particular, la potencia dos, o cuadrado, de un número se obtiene al multiplicarlo por sí mismo y se denota escribiendo un 2 pequeño en la parte superior derecha de dicho número. Por ejemplo, el cuadrado de 5 se escribe de la siguiente forma: $5^2 = 5 \times 5 = 25$; y el cuadrado de -3 se escribe $-3^2 = -3 \times -3 = 9$

La tercera potencia, o el cubo, de un número se obtiene al multiplicarlo por sí mismo y el resultado de nuevo por el número original, como en los siguientes ejemplos:

$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 49 \times 7 = 343$
$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4 = 64$

La potencia cuarta se obtiene multiplicando un número por sí mismo, el resultado de nuevo por el mismo número y el nuevo resultado por el número original, y así sucesivamente para las potencias que siguen.

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 \times 3 = 27 \times 3 = 81$
$-6^4 = -6 \times -6 \times -6 \times -6 = 36 \times -6 \times -6 = -216 \times 6 = 1296$

El número pequeño colocado en la parte superior, que identifica a la potencia, recibe el nombre de **exponente**; el número que multiplicamos por sí mismo se llama **base**. El exponente indica cuántas veces debe multiplicarse la base por sí misma.

Como seguramente descubriste, cuando se eleva un número negativo a una potencia par el resultado será positivo, sin embargo, si se eleva un número negativo a una potencia impar el resultado será negativo. Las potencias pares siempre son positivas debido a las propiedades de la multiplicación, que, como ya lo estudiaste, dicen que el producto de dos negativos da como resultado un número positivo $- \times - = +$, es decir, que por cada dos signos $-$ obtengo $+$: $-2^5 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 \times -2 = 4 \times 4 \times -2 = -32$, en cambio, las potencias impares siempre dan un resultado negativo.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué operaciones debemos realizar?

____

____

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué pasa cuando un número negativo se eleva a un exponente par?, ¿y a un exponente impar? Piénsalo unos instantes y haz ejemplos. La respuesta es… ¿un número positivo o uno negativo?

Más información en...

Consulta http://www.escolar.com/matem/25potenc.htm http://www.ejemplode.com/5-matematicas/415-ejemplo_de_exponentes_pares.html

Propiedades de los exponentes

Para poder manejar con facilidad los exponentes es importante que conozcas sus propiedades, ya que te servirán de ayuda para simplificar algunas expresiones y así realizar operaciones de manera más sencilla. Deberás entender primero la teoría, para poder realizar las operaciones de forma razonada y no memorística.

1. ***Propiedad del producto.*** Al multiplicar dos potencias con la misma base, se conserva la base y se suman los exponentes: $x^a \times x^b = x^{a+b}$
   Ejemplo: $3^4 \times 3^2 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^{4+2} = 3^6 = 729$

2. ***Propiedad de la potencia de una potencia.*** La potencia de un número elevada a otra potencia, es igual a la multiplicación de ambos exponentes: $(x^a)^b = x^{ab}$.
   Ejemplo: $(2^5)^2 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)^2 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^{5 \times 2} = 2^{10} = 1024$
3. ***Propiedad del producto de dos números elevados a una misma potencia.*** La multiplicación de dos números elevados a la misma potencia es igual a la multiplicación de esos números elevada a la potencia común: $x^a \times y^a = (x \times y)^a$.
   Ejemplo: $4^3 \times 3^3 = (4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3) = 4 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 = (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) = 12 \times 12 \times 12 = 12^3 = 1728$.
4. ***Propiedad del cociente de dos potencias*** *(donde $x \neq 0$).* La división de dos potencias con la misma base, es lo mismo que la base elevada a la resta de los exponentes: $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$. Ejemplo: $\frac{9^5}{9^3} = 9^{5-3} = 9^2 = 81$
5. ***Propiedad de la potencia de un cociente*** *(donde $y \neq 0$).* Una fracción en la que el numerador está elevado a una potencia y el denominador está elevado a la misma potencia, es lo mismo que la fracción elevada a esa potencia. $\frac{x^n}{y^n} = \frac{x}{y}^{\,n}$
   Ejemplo: $\frac{7^2}{3^2} = \frac{7}{3}^{\,2} = \frac{49}{9}$
6. ***Propiedad de la potencia cero.*** Todo número elevado a la potencia cero es igual a uno: $x^0 = 1$; Ejemplo: $8^0 = 1$.
   Esto se deduce de la propiedad 4. Si tenemos el cociente de una potencia con la misma base y también con el mismo exponente, sucede lo siguiente:
   $\frac{8^3}{8^3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 8} = 1$
   Por otro lado de acuerdo con la propiedad 4: $8^3 \times 8^{-3} = 8^0 = 1$.
7. ***Propiedad de la potencia uno.*** Todo número elevado a la potencia uno es igual a si mismo: $x^1 = x$.
   Ejemplo: $7^1 = 7$
   También podemos verificar esta propiedad a partir de la del cociente de dos potencias:
   $\frac{7^3}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} = 7$ por otro lado: $7^3 \times 7^{-2} = 7^{3-2} = 7$
8. ***Propiedad del recíproco o inverso.*** Todo número elevado a la potencia -n es igual al inverso de ese número a la potencia n: $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
   Ejemplo: $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0.04$
   Una vez más podemos probar esta propiedad combinando la del cociente de dos potencias y la de la potencia cero:
   $\frac{1}{5^2} = \frac{5^0}{5^2} = 5^{0-2} = 5^{-2}$

SESIÓN 12 LOS EXPONENTES Y EL AJEDREZ

Actividad 11

A. Efectúa las operaciones de la izquierda, utilizando las propiedades de los exponentes y une con una línea la respuesta correspondiente del lado derecho:

a) $\frac{7^5}{7^2}$	0.015625
b) $(2^4)^3$	729
c) $5^2 \times 5^3$	–125
d) 4^{-3}	343
e) -5^3	3125
f) $(3^{-3})^{-2}$	4096

B. Ahora, realiza los cálculos aplicando las reglas y propiedades correspondientes:

a) $-4^3 =$

b) $\frac{3^8}{3^5} =$

c) $2^5 \times 2^2 =$

d) $(3^4)^2 =$

e) $(2^2)^{-3} =$

f) $\frac{5^2}{5^4} =$

¡No olvides consultar el Apéndice 1 para revisar tus respuestas! Lo más importante de la actividad anterior fue asegurar tu conocimiento de las propiedades de los exponentes.

Cuentan que el inventor del ajedrez se lo enseñó al rey de la India. A éste le gusto tanto que le dijo "Pídeme lo que quieras y yo te lo concederé". El sabio le dijo al rey: "Quiero dos granos de trigo en la primera casilla del tablero, cuatro en la segunda, ocho en la tercera, dieciseis en la cuarta, y así sucesivamente". El rey incluso se enfadó y le dijo: "¿Eso nada más? ¡Has despreciado mi generosidad! Diré a mis criados que te den lo que has pedido en un saco." Pero cuando sus matemáticos hicieron el cálculo se quedaron atónitos: "Majestad, ¿qué habéis hecho? Se necesitaría la cosecha de trigo de todo el mundo durante 150 años para dar el trigo prometido."

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

Ahora lee y reflexiona sobre esta historia:

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué operaciones debemos realizar?

____

____

Compruébalo en la calculadora. Recuerda que el tablero de ajedrez tiene 64 casillas.

Debemos duplicar el número de granos en cada casilla. A la primera casilla le corresponden 2 granos, a la segunda, $2 \times 2 = 4$ granos, a la tercera $2 \times 2 \times 2 = 8$ granos, y así sucesivamente. Para la casilla 64, tendremos que multiplicar 64 veces 2, es decir, 2^{64} = 18'446,744'073,709'551,616. ¡Muchísimos granos!

Observa que cuando efectuamos la potencia en la calculadora, únicamente realizamos una operación. De otro modo, tendríamos que multiplicar por dos 64 veces, lo que implicaría oprimir muchos botones y una gran posibilidad de equivocarnos…

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¡Lee el problema y reflexiónalo!

En el siguiente problema se requiere aplicar las propiedades de los exponentes.

Un tipo de bacteria se reproduce de tal forma que cada hora hay diez veces más bacterias que la hora anterior.

- Si partimos de una sola bacteria, ¿cuántas habrá dentro de 1 hora?
- ¿Dentro de 10?

Si en un momento determinado tenemos diez millones de bacterias, ¿cuántas había la hora anterior?, ¿y tres horas antes?

- ¿Cuántas horas son necesarias para que haya un millón de bacterias?, ¿y un billón?

Antes de seguir leyendo intenta resolverlo usando sólo tus conocimientos.

____

____

____

- Si partimos de una sola bacteria, ¿cuántas habrá dentro de una hora?

En una hora habrá diez veces más bacterias, ya que así se señala en la propuesta del problema, o sea:

$1 \times 10 = 10$ bacterias.

- ¿Dentro de diez?

10^{10} = 10,000,000,000 bacterias. ¿Por qué? Después de una hora habrá 10 bacterias; al final de la segunda, cada una de estas 10 bacterias se habrá reproducido

10 veces, entonces habra 10×10 bacterias, o 10^2. Al final de la tercera, esas 100 bacterias se habrán reproducido cada una 10 veces, entonces habrá $100 \times 10 = 10^3$. Siguiendo esta lógica, diez horas despues habrá 10^{10}.

- Si en un momento determinado tenemos diez millones de bacterias, ¿cuántas había la hora anterior?, ¿y 3 horas antes?

  La hora anterior: $10{,}000{,}000 \div 10 = 1{,}000{,}000$
  Tres horas antes: $10{,}000{,}000 \div 10^3 = 10{,}000{,}000 \div 1{,}000 = 10{,}000$

- ¿Cuántas horas son necesarias para que haya un millón de bacterias?, ¿y un billón?

Un millón de bacterias: $1{,}000{,}000 = 10^6$, por lo tanto, se necesitan 6 horas. Un billón de bacterias: $1{,}000{,}000{,}000{,}000 = 10^{12}$, por lo tanto, se necesitan 12 horas.

Intenta ahora responder el problema 5, el de las galletas que se planteaban Ángel y Claudia, aplicando lo que has aprendido sobre las diferentes operaciones con números reales. Describe cuáles 2 operaciones puedes utilizar para resolverlo.

El camión proveedor de galletas les llevaría cajas, que contienen cada una otras 12 cajas más pequeñas, y cada caja pequeña contiene 12 cajitas con 12 bolsas; y cada bolsa contiene 12 galletas cada una, ¿cuántas galletas se les deja en total en cada caja? Considerando que requerirán el doble de galletas que de cafés que vendan, ¿les alcanza con una caja?

¡Resolvamos la interrogante!

Observa que la primera parte de esta pregunta requiere realizar una multiplicación del mismo número varias veces, es decir, efectuar la potencia de un número. ¿Cuál? 12. ¿Cuántas veces? 4. Esto se puede efectuar haciendo multiplicaciones sucesivas del número 12, o elevando 12 a la potencia 4 directamente en la calculadora. Puedes verificarlo haciéndolo de ambas maneras.

$12^4 = 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 20{,}736$ galletas. Si ellos consideran que requerirán dos galletas por cada café que vendan, ¿cuántas galletas necesitan, digamos para un mes?, ¿les alcanza con una caja? Si venderán según sus estimaciones 100 cafés al día, requerirán 200 galletas al día y 6,000 al mes; ¡las que vienen en una caja les alcanzan para más de tres meses!

SESIÓN 13 CON LAS RAÍCES BIEN FIRMES

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué operaciones debemos realizar?

____

____

Radicación

PROBLEMA 6 Para la remodelación del local, Ángel y Claudia necesitarán cubrir el piso del mismo, cuya forma es cuadrada, con baldosas nuevas, y quieren que a lo largo de uno de los lados las baldosas sean de diferente color. ¿Cuántas **baldosas** de diferente color se requieren para cubrir el largo del local si este mide 100 m^2 y las baldosas miden 50 cm por cada lado? ¿Cuántas en total para todo el local?

Para encontrar la respuesta a este problema debemos encontrar la medida del lado de un cuadrado, para lo que nos sirve que conocemos su área y que es cuadrado. Recuerda que para obtener el área teniendo la medida de un lado, elevamos al cuadrado. Ahora requerimos hacer la operación inversa de la potencia, que es la **raíz**. Esto significa que si $5^2 = 25$, $\sqrt{25} = 5$; y si $3^4 = 81$, $\sqrt[4]{81} = 3$.

Las raíces cuadradas de números enteros tienen dos posibles resultados, el valor positivo y el negativo. Por ejemplo, existen dos números enteros que satisfacen que su cuadrado sea igual a 16, el 4 y el –4, porque $4^2 = 4 \times 4 = 16$ y también $-4^2 = -4 \times -4 = 16$.

glosario

Baldosa: pieza de mármol, cerámica o piedra, generalmente fina y pulimentada, que se usa en pisos y muros.

Propiedades de la radicación

1. ***Para n par, no esta definida si $x < 0$, es decir, si x es negativo.***

No existe ningún número que al multiplicarse por sí mismo un par de veces dé como resultado un número negativo, debido a que al multiplicar un número por sí mismo, sea este negativo o positivo, el resultado siempre es positivo.

Ejemplo: $\sqrt{-36}$ no está definida para los números reales, porque no existe un número que al multiplicarse por sí mismo tenga como resultado –36. Piensa en 6 o en –6, por ejemplo, al elevarlos al cuadrado obtienes 36. Lo mismo ocurre para la cuarta potencia.

Ejemplo: $\sqrt[4]{-81}$ no está definida para los números reales, porque no existe un número que al multiplicarse por sí mismo cuatro veces dé –81. El 3 o el –3, por ejemplo, al elevarlos a la cuarta potencia, obtengo 81.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$; $-3 \times -3 \times -3 \times -3 = 81$ (por ser potencia par).

2. ***Las raíces del cero son iguales a cero para cualquier n:*** $\sqrt[n]{0} = 0$

3. ***Las raíces impares de números positivos son positivas:*** $\sqrt[n]{x} > 0$ *si* $x > 0$ *y n es impar*. Ejemplo: $\sqrt[3]{27} = 3$.

4. ***Las raíces impares de números negativos son negativas:*** $\sqrt[n]{x} < 0$ *si* $x < 0$ *y n es impar*. Ejemplo: $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Exponentes racionales

Una expresión radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ se puede escribir como una expresión exponencial de la forma $a^{m/n}$.

Ejemplos: $\sqrt{25} = 25^{1/2}$, $\sqrt[4]{2^3} = 2^{3/4}$

En otras palabras, la raíz de un número elevado a una potencia puede escribirse como el cociente del exponente entre la raíz.

Actividad 12

A. Efectúa las operaciones de la izquierda, utilizando las propiedades de los exponentes racionales y une con una línea la respuesta correspondiente del lado derecho:

a) $81^{1/2}$	4
b) $8^{2/3}$	no está definida
c) $\sqrt{-5^2}$	-2
d) $\sqrt[5]{-32}$	9
e) $\sqrt[4]{-625}$	0
f) $\sqrt{0}$	5

B. Realiza los cálculos siguientes considerando las reglas y propiedades que has estudiado:

a) $\sqrt[5]{-243}$

b) $\sqrt{1}$

c) $121^{1/2}$

d) $\sqrt[3]{-343}$

e) $\sqrt[8]{100{,}000{,}000}$

f) $16^{1/4}$

Consulta el Apéndice 1 para valorar tu aprendizaje.

FICHERO

Ahora elabora tu ficha de resumen. Incluye las reglas esenciales de cada operación: suma, resta, multiplicación, división, potencia, radicación, así como las propiedades de los exponentes y la radicación. No olvides incluir un ejemplo en cada caso, como mínimo. Este ejercicio te permitirá revisar los conocimientos que has adquirido. En caso de duda vuelve a revisar el texto y analiza los ejemplos, así como cada uno de los ejercicios, para comprender el tema y resolver tus dudas. Es muy importante que sigas las sugerencias que te ofrece el texto. En tus labores cotidianas, identifica cuáles de estas operaciones usas y qué reglas aplicas. Regístralas en tu bitácora.

Analiza el siguiente problema:

En una casa, el jardín tiene 16 metros de largo y 9 metros de ancho. Si la casa de al lado tiene un jardín cuadrado con la misma área, ¿cuánto mide cada lado?

El área del jardín de la primera casa mide $16 \times 9 = 144$ m^2. Recuerda que el área de un cuadrado se obtiene multiplicando la medida del lado por sí misma, es decir, elevándola al cuadrado. Por lo tanto, para encontrar la medida del lado debemos efectuar la operación inversa, o sea, obtener la raíz cuadrada.

$\sqrt{144} = 12$. Por lo tanto, cada lado mide 12 metros.

¡Has aprendido bastante sobre las operaciones con los números reales!

Tal como vimos en temas anteriores, conocer los números reales y sus operaciones nos sirve para solucionar problemas de nuestra vida cotidiana. Intenta ahora resolver el problema 6 de Ángel y Claudia. Recuerda que desean cubrir el piso del local, cuya forma es cuadrada, con baldosas nuevas. A lo largo de uno de los lados las baldosas serán de diferente color. ¿Cuántas baldosas de diferente color se requieren para cubrir el largo del local si mide 100 m^2 y las baldosas miden 50 cm por cada lado?, ¿y cuántas en total?

Este problema lo podemos resolver utilizando la raíz cuadrada, ¿no es así? Si tenemos un área de 100 m^2, ¿cuántos metros mide cada lado? Esto lo puedes resolver buscando el número que multiplicado por sí mismo dé como resultado 100. $\sqrt{100} = 10$. Por lo tanto, cada lado de la cafetería mide 10 metros, y si consideramos que las baldosas miden 50 centímetros, o la mitad de un metro, se requieren 2 baldosas por metro, por lo que se necesitan: $2 \times 10 =$, *20 baldosas de diferente color*. Como son 20 líneas de baldosas de 50 cm, requieren $20^2 = 20 \times 20 = 400$ baldosas en total.

Como puedes observar, has aprendido a realizar operaciones con los números reales, sin embargo es necesario considerar un caso especial: las fracciones, lo que haremos más adelante.

Antes de terminar el tema, lleva a cabo una evaluación de tus avances utilizando la lista de cotejo siguiente; colorea lo que corresponda a tu nivel de progreso según el criterio de desempeño indicado. Toma en cuenta que el máximo es 5 y el mínimo 1. Si encuentras en alguno de los criterios que te calificas en 3 o menos, te sugerimos que repases el tema.

Utilizar operaciones algebraicas con polinomios para la solución de problemas					
Criterios de desempeño	Nivel de desempeño				
	1	2	3	4	5
Sé identificar los subconjuntos de los números reales (enteros, racionales, reales).					
Sé identificar datos y el cuestionamiento del problema.					
Sé realizar operaciones con números reales (enteros).					
Sé aplicar las propiedades de los exponentes.					
Se resolver problemas relacionados con mi entorno utilizando los números reales.					

SESIÓN 14 POR FIN, ¿PARA QUÉ NOS ALCANZA?

Operaciones con fracciones

Acuérdate del problema 2 que vimos en la recta numérica, pero que no hemos resuelto matemáticamente. En éste Ángel y Claudia contaban con ahorros por \$45,000.00 y pidieron prestado \$7,200.00, después de destinar $\frac{3}{5}$ del total para la compra de computadoras y $\frac{1}{8}$ de lo que les sobró para adquirir una impresora. ¿Qué cantidad les queda?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué operaciones debo realizar para resolver el problema?

____

____

Las operaciones con fracciones requieren manejarse de forma diferente, por lo que es necesario repasar y revisar los procedimientos de las operaciones de forma independiente, pues estos suelen dificultársenos.

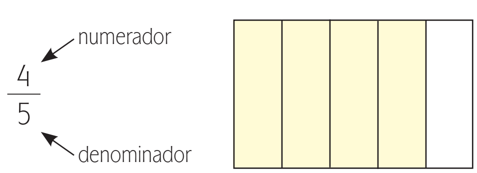
Recuerda que, dentro de los números racionales, están aquellos que se escriben en forma de fracción, como $\frac{4}{5}, \frac{7}{2}, \frac{1}{20}$, etcétera. Estos números se obtienen al dividir números enteros en partes iguales. Por ejemplo, cuando decimos un cuarto de hora, estamos dividiendo una hora en cuatro partes y consideramos una de esas partes.

Los números racionales en forma de fracciones comparten las propiedades de los números enteros, sin embargo, para realizar operaciones con ellos se requiere conocer algunas de sus **particularidades**.

glosario

Particularidad: singularidad, especialidad, individualidad.

Las **fracciones** se componen de **numerador** y **denominador**. El denominador representa la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad, y el numerador es la cantidad que se toma de éstas.



Gestión del aprendizaje

¡Ojo! Los números fraccionarios y sus operaciones requieren especial atención. Concéntrate en entender los conceptos planteados aquí y en tener claras las reglas para la ejecución de operaciones. Conforme avances, haz anotaciones de las ideas importantes y escribe los procedimientos en tus propias palabras.

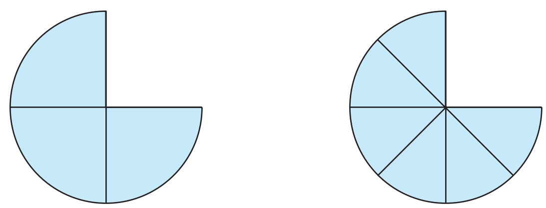
El rectángulo del dibujo anterior se ha dividido en 5 partes iguales (denominador) y se han tomado 4 de éstas (numerador).

Fracciones equivalentes

Las **fracciones equivalentes** son aquellas que tienen el mismo valor, aunque parezcan diferentes. Ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

Puedes probar que las fracciones anteriores son iguales efectuando las divisiones correspondientes: $3 \div 4 = 0.75$; del mismo modo: $6 \div 8 = 0.75$

También puedes pensarlo como que tres cuartas partes de una pizza es la misma cantidad que seis octavas partes de una pizza del mismo tamaño.



Observa que en la segunda fracción tanto el numerador como el denominador están multiplicados por 2, con respecto de aquellos de la primera fracción.

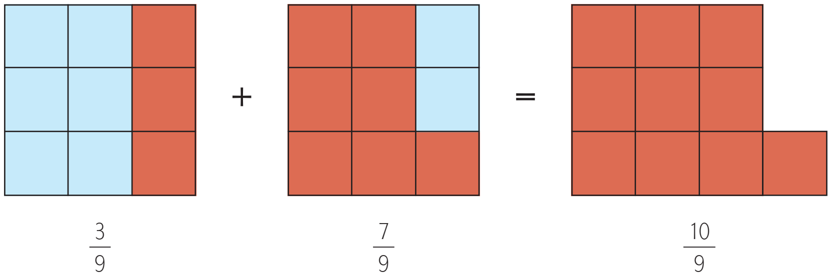
También serían fracciones equivalentes las siguientes: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$. Esta vez el numerador y el denominador están multiplicados por 3.

Serán fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$ todas aquellas fracciones que resulten de multiplicar al numerador y al denominador por el mismo número entero.

En general, dos fracciones son equivalentes si cumplen lo siguiente: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ siendo n un número entero.

Suma y resta de fracciones

Observa:



La **suma** (o la **resta**) de fracciones con un denominador común, es un número racional cuyo numerador es la suma (o resta) de los numeradores y cuyo denominador es el denominador común.

Ejemplo: $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{7}, \frac{5}{4}-\frac{7}{4}=\frac{-2}{4}$

Y para dos números racionales cuyo denominador no es común, la suma (o resta) se define de la siguiente manera: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}; \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d-c\times b}{b\times d}$

Multiplicación de fracciones

La **multiplicación** o **producto** de dos fracciones es otro número racional que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo: $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{8\cdot 6}=\frac{15}{48}$

División de fracciones

La **división** de dos números racionales **es otro** número racional que tiene por numerador el producto del numerador del primero con el denominador del segundo, y por denominador el producto del denominador del primero con el numerador del segundo.

Ejemplo: $\frac{2}{7}\square\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 3}=\frac{10}{21}$

Las flechas en la siguiente imagen te pueden ayudar a que no olvides cómo se efectúan la multiplicación y la división.

$\frac{4}{7}\times\frac{8}{5}=\frac{32}{35}$

Multiplicación

$\frac{9}{4} : \frac{7}{3} = \frac{27}{28}$

División

Números mixtos

Es posible que en ocasiones encuentres números que constan tanto de una parte entera como de una fraccionaria. A un número como estos se le llama **número mixto**.

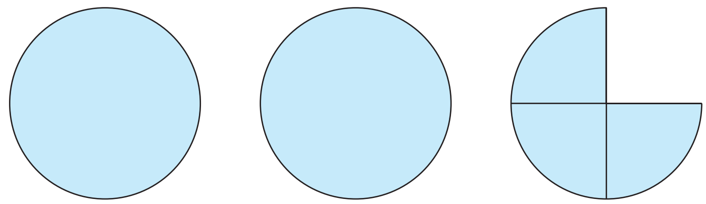
Ejemplo: $3\frac{1}{5}$

Un número mixto puede escribirse como fracción si partimos los enteros en las mismas partes que indica el denominador de la parte fraccionaria.

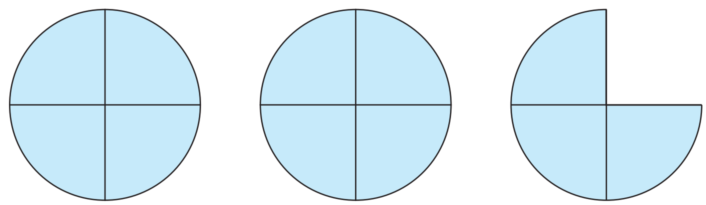
Por ejemplo, si tengo $2\frac{3}{4}$ de pizza, tengo dos pizzas enteras y tres cuartos más de pizza, como se muestra en la siguiente figura:

¿? Asesoría

Si te das cuenta, no puedes sumar fracciones con denominadores diferentes, porque sería como tomar por iguales a fracciones de diferente tamaño. Si parto una pizza en cinco partes iguales, las rebanadas serán de diferente tamaño que si la parto en dos partes iguales. Por eso no puedo sumar medios con quintos. Lo que necesito hacer es subdividir las fracciones que estoy considerando en una fracción del mismo tamaño que pueda estar contenida en ellas.



Si partimos las pizzas enteras en cuartos tendremos la misma cantidad de pizza, pero toda partida en cuartos.



Si contamos los cuartos de pizza de la figura anterior, podemos ver que hay 11 cuartos. Cuatro cuartos de cada pizza entera, más tres cuartos de la otra.

4 + 4 + 3 cuartos
2 × 4 + 3 cuartos

Por lo tanto, $2\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{11}{4}$

En general, para pasar de un número mixto a una fracción se mantiene el mismo denominador y el numerador será la suma de la multiplicación del entero por el denominador más el numerador del número mixto. $a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}$

Ejemplo: $5\frac{1}{3}=\frac{5\times 3+1}{3}=\frac{16}{3}$

Para pasar una fracción a número mixto se divide el numerador entre el denominador, y el cociente será el entero, el residuo será el numerador y el denominador se mantiene.

Ejemplo:
Si quiero convertir $\frac{8}{3}$ en número mixto: 8 ÷ 3 = 2 y sobran 2, $\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

SESIÓN 15 SÍ NOS ALCANZA, ¿PERO CUÁNTO SOBRA?

Potencia y raíz de fracciones

Para obtener la **potencia** de una fracción elevamos tanto el numerador como el denominador a esa potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Lo mismo se cumple para raíces si consideramos que n puede ser racional. Tambien se cumple que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

Más información en...

Sobre fracciones consulta: http://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/operaciones_con_fracc.pdf http://www.vitutor.net/2/3/4.html]

Analiza los siguientes problemas:

1. Un agricultor planta $\frac{1}{4}$ de su huerta con jitomates, $\frac{1}{3}$ con chile, y el resto, que son 240 m^2, con papa. ¿Qué fracción ha plantado con papa?, ¿cuál es la área de la huerta?

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3+4}{12}=\frac{7}{12}$$

Plantó $\frac{7}{12}$ de la huerta con jitomate y chile, por lo que planta papa en $1-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}$ de la huerta, que corresponden a 240 m^2. Si $\frac{5}{12}$ corresponden a 240 m^2, $\frac{1}{12}$ es 240 ÷ 5 = 48 m^2, por lo tanto, toda la huerta corresponde a $\frac{12}{12}$, o sea, 48 × 12 = 576 m^2. Lo anterior equivale a realizar la siguiente división: $240 \div \frac{5}{12}=\frac{240\cdot 12}{5}=576$.

2. Un depósito contiene 250 litros de agua. Si se consumen $\frac{2}{5}$ de su contenido, ¿cuántos litros de agua quedan?
Para obtener dos quintas partes de 250 debemos multiplicar:

$$250\cdot\frac{2}{5}=\frac{500}{5}=100$$

Ahora restamos lo que se gastó a lo que contenía el depósito, 250 – 100 = 150, el resultado es lo que le queda en litros al depósito.

3. Hace tiempo Cecilia tenía 18 años, que representan $\frac{2}{3}$ de su edad actual, ¿cuál es la edad actual de Cecilia?
Dividimos: $18 \div \frac{2}{3}=\frac{18\cdot 3}{2}=27$, Cecilia tiene 27 años.

Actividad 13

A. Encierra en un cuadro rojo todas las que sean fracciones equivalentes de $\frac{7}{9}$:

$$\frac{27}{36} \qquad \frac{49}{63} \qquad \frac{14}{27} \qquad \frac{-14}{-18} \qquad \frac{-14}{18} \qquad \frac{350}{450}$$

B. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\frac{-4}{7}+\frac{2}{9}=$

b) $\frac{13}{8}\times\frac{-6}{7}=$

c) $4\frac{1}{9}\div\frac{-5}{3}=$

d) $\frac{-2}{3}+\left(\frac{-5}{2}\right)^{3}=$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\div\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

f) $\left(\frac{-2}{3}+\frac{-5}{2}\right)^{3}\div 2\frac{3}{5}=$

C. Resuelve los siguientes problemas:

a) Entre varios amigos organizaron un día de campo durante el cual consumieron entre todos 3 botellas de litro y medio de agua, 7 latas de 1/3 de litro de refresco y 2 jarras de 3/4 de litros de limonada, ¿cuántos litros de líquido bebieron?

b) Pedro ha caminado 0.450 kilometros, que son $\frac{2}{3}$ del camino de su casa a la escuela, ¿qué distancia hay entre su casa y la escuela?

c) Lorena dispone de \$500.00 para hacer compras el fin de semana. El sábado gastó $\frac{2}{5}$ del dinero y el domingo $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba, ¿cuánto gastó cada día y cuánto le quedó al final?

Compara tus resultados con los que se muestran en el Apéndice 1. Si fueron correctos, ya obtuviste nuevos conocimientos que te ayudarán a resolver el problema de Ángel y Claudia. ¡Actívate!

Intenta responder tú solo el problema 2, el de la distribución del dinero, aplicando lo que has aprendido sobre las fracciones y sus operaciones. Escribe el procedimiento y el resultado. De \$52,200.00 gastaron, primero $\frac{3}{5}$ del total y $\frac{1}{8}$ del resto después, en las computadoras y la impresora, ¿cuánto dinero les queda?

¡Examinemos la pregunta para ver cómo lo hiciste!

Primero tienes que obtener tres quintas partes de \$52,200, y para ello debes multiplicar esta cantidad por $\frac{3}{5}$: $52{,}200\times\frac{3}{5}=\frac{52{,}200\times 3}{5}=\frac{156{,}600}{5}=31{,}320$ pesos han gastado en la compra de las computadoras.

Ahora debes restarle esta cantidad a lo que tenían: 52,200 – 31,320 = 20,880.00 pesos les quedan.

Ahora debes calcular una octava parte de esos \$20,880.00, multiplicando por $\frac{1}{8}$.
$20{,}880\times\frac{1}{8}=\frac{20{,}880}{8}=2{,}610$ pesos gastaron en la compra de la impresora.

Restando lo que gastaron en la impresora a lo que tenían les da el saldo con el que cuentan: 20,880 – 2,610 = 18,270 pesos es lo que les queda, sin descontar lo que deberán pagar del crédito.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Cómo puedo comparar cantidades cuando se trata de fracciones?

____

____

Orden de los números racionales

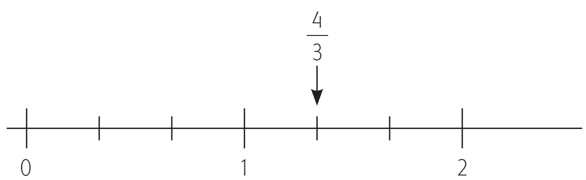
PROBLEMA 7 Ángel y Claudia están considerando contratar a un empleado que les ayude con el trabajo en el cibercafé. Han entrevistado a dos personas y el primero les dice que cobrará \$35.00 por hora, y el segundo les dice que cobrará \$39.00 por hora, ¿cuál de ellos cobrará más a la semana si el primero trabajará $42\frac{3}{5}$ horas semanales, y el segundo trabajará $40\frac{1}{3}$ horas semanales?

En ocasiones, nos topamos con la necesidad de decidir si una cantidad es mayor que otra. Por ejemplo, si Juan tiene \$40.00 y Alicia tiene \$50.00, sabemos que Alicia tiene una cantidad mayor de dinero que Juan. Sin embargo, cuando queremos comparar cantidades que son fracciones, puede ser más complicado, ¿cómo podemos comparar fracciones? Entre $\frac{24}{13}$ y $\frac{53}{29}$, ¿cuál de las dos es mayor?

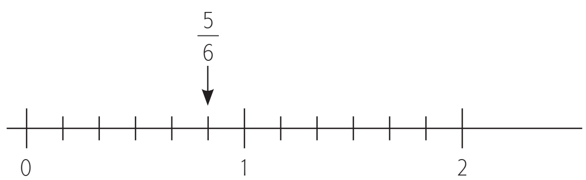
La recta numérica también nos sirve como apoyo para comparar fracciones, ubicando cada una en la recta y observando la posición para establecer el orden entre ellas.

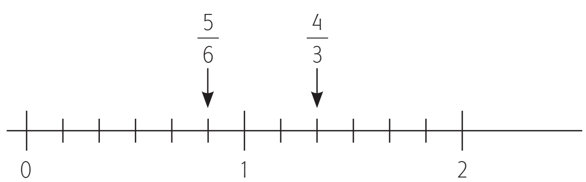
¡Recuerda que cuando un número se encuentra en la recta numérica a la derecha de otro, éste es mayor que el primero!

Por ejemplo, para comparar $\frac{4}{3}$ con $\frac{5}{6}$ podemos hacerlo a partir de su localización en la recta numérica. Para localizar $\frac{4}{3}$ debemos dividir las unidades en tercios, o sea partir en tres cada unidad, y avanzar cuatro de estos tercios a partir del 0.



Para localizar $\frac{5}{6}$ en la recta numérica debemos partir las unidades en seis y avanzar cinco desde el cero.





Por lo tanto, $\frac{5}{6} < \frac{4}{3}$. Entonces, podemos decir que:

Dados dos números racionales $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ con n y q naturales, se cumple una de las siguientes relaciones de orden: $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, o bien $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, o bien $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Esta relación de orden es la misma que existe entre los productos mq y np.

Ejemplos:

$\frac{4}{3} > \frac{5}{6}$ pues $24 > 15$

$$\frac{-6}{7} < \frac{-2}{5} \text{ pues } -30 < -14$$

$$\frac{-1}{3} < \frac{1}{5} \text{ pues } -5 < 3$$

Actividad 14

Determina la relación de orden que existe entre las siguientes parejas de números y escribe en la línea azul el signo que corresponde (<, > o =):

A. $\frac{2}{3}$ ______ $\frac{7}{12}$

B. $\frac{11}{9}$ ______ $\frac{5}{4}$

C. $\frac{-2}{7}$ ______ $\frac{-1}{3}$

D. $\frac{-6}{11}$ ______ $\frac{-25}{46}$

E. $\frac{-28}{45}$ ______ $\frac{-84}{135}$

F. $\frac{-2}{5}$ ______ $\frac{1}{5}$

G. Traza una recta numérica y localiza los números $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{6}$, indica cuál es mayor.

Para revisar tus respuestas y verificar tus aprendizajes no olvides consultar el Apendice 1.

Otra forma alternativa de determinar el orden de dos números racionales es pasarlos a su forma decimal y así hacer la comparación.

Por ejemplo, si quiero saber entre $\frac{6}{5}$ y $\frac{7}{6}$ cuál de ellos es mayor, puedo pasarlos a la forma decimal, efectuando la división.

$$\frac{6}{5} = 1.2,\ \frac{7}{6} = 1.1666\ldots,\ 1.2 > 1.1666\ldots, \text{ por lo tanto: } \frac{6}{5} > \frac{7}{6}.$$

Analicemos el problema 7. Ángel y Claudia están considerando contratar a un empleado que les ayude con el trabajo en el cibercafé. Han entrevistado a dos personas y la primera les dice que cobrará \$35.00 por hora, y la segunda les dice que cobrará \$39 por hora. ¿Cuál de ellas cobrará más a la semana si la primera trabajara $42\frac{3}{4}$ horas semanales, y la segunda trabajara $40\frac{1}{3}$ semanales?

Se requiere multiplicar el número de horas trabajadas por la cantidad que se le pagaría a cada empleado por hora. El salario semanal del empleado 1 sería: $42\frac{3}{4} \times 35 = \frac{171}{4} \times \frac{35}{1} = \frac{5985}{4} = 1{,}496.25$. El salario semanal del empleado 2 sería:

FICHERO

Elabora ahora tu ficha resumen sobre las fracciones. Sintetiza los conceptos y reglas que has estudiado; ¡no olvides incluir ejemplos! En los siguientes días presta atención a las situaciones de tu vida cotidiana en las que encuentras fracciones, como la hora, las bebidas, el almuerzo que compartes, etcétera. Anótalas en tu bitácora.

$40\frac{1}{3}\times 39=\frac{121}{3}\times\frac{39}{1}=\frac{4719}{3}=1573.00$. Tenemos entonces que 1,496.25 < 1,573.00, por lo tanto el empleado 2 cobraría más.

Recuerda que si identificas algún concepto o procedimiento matemático de los que ya has estudiado que aun te cueste trabajo, puedes buscar a alguien cercano a ti para que te brinde apoyo; recuerda que también puedes acercarte al servicio de asesoría que ofrecen los Centros de Servicio de Preparatoria Abierta, consultar a algún familiar o amigo que conozca sobre el tema, o en referencias bibliográficas, e incluso en la Red.

SESIÓN 16 ¿NOS ALCANZA PARA TODOS?

Divisibilidad

PROBLEMA 8 Para ahorrar en mobiliario, Ángel y Claudia están haciendo algunos muebles de madera ayudados por un amigo suyo que sabe de carpintería. Sobraron 2 tablones de una madera que utilizaron para hacer una mesa. Quieren aprovechar esa madera para construir una estantería y colocar en ésta el papel. Uno de los tablones mide 216 cm de largo y el otro 120 cm, ambos de 30 cm de ancho. Quieren cortarlos en trozos que midan lo mismo y sean lo más largo posibles sin que sobre nada. ¿Cuánto debe medir cada pedazo? ¿Cuántos pedazos se obtienen de cada tablón?

Seguramente alguna vez has tenido la necesidad de repartir cosas. ¿Has notado que en algunos casos esta repartición es exacta y en otros no? Por ejemplo, si quieres repartir 24 objetos entre 6 personas, la repartición será exacta. Le tocarán 4 objetos a cada uno. Si quieres repartir 23 objetos entre 5 personas, la repartición no será exacta. Si la repartición es **equitativa**, le tocarán 4 objetos a cada uno y sobrarán 3. Cuando una cantidad se puede repartir de manera exacta entre otra, se dice que ésta es **divisible** entre la otra.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

Responde la siguiente pregunta:
¿Cómo puedo encontrar números que dividan a otros en partes iguales?

____

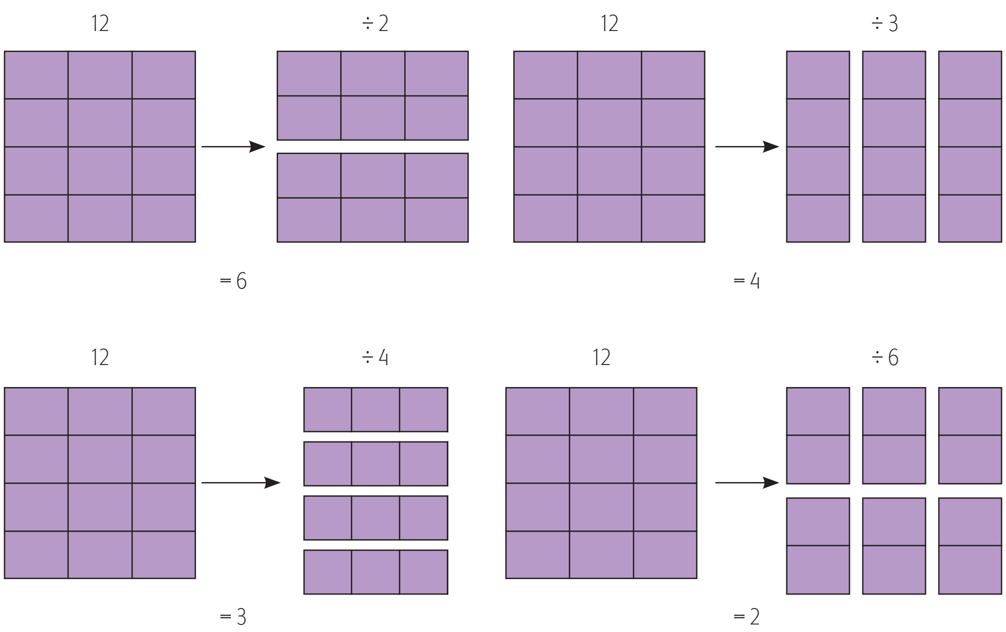
____

glosario

Equitativo: que se caracteriza por su equidad, imparcialidad o justicia.

En muchas ocasiones se requiere repartir algo en partes iguales sin que sobre nada, y además, saber de qué tamaño son esas partes en las que se reparte una cantidad. Es por ello que se estudia la teoría de la divisibilidad que nos proporciona las herramientas para poder repartir objetos de forma exacta.

Se dice que a es divisible por b si existe un tercer número c tal que $a = b \times c$, para a, b y c números enteros. Por ejemplo, 12 es divisible por 6 ($12 = 6 \times 2$), por 4 ($12 = 4 \times 3$), por 3 ($12 = 3 \times 4$) y por 2 ($12 = 2 \times 6$).



Divisores y múltiplos

PROBLEMA 9 Claudia y Ángel han estado haciendo cuentas sobre la cantidad de dinero y las fechas en que lo necesitan para abastecerse de productos para su negocio. Además, quieren prever en qué momentos efectuarán los pagos correspondientes a cada proveedor. El proveedor de café les surtirá cada 15 días y el de papel les surtirá cada 24 días. Si saben que el 3 de octubre vendrán los dos a la vez, ¿en qué fecha volverán a coincidir los dos al mismo tiempo?

Para resolver este problema requerimos encontrar un número al cual lleguemos tanto multiplicando de 15 en 15, como multiplicando de 24 en 24. A los números que son multiplicaciones de otros, se les conoce como **múltiplos**.

Si *a divide* a *b*, entonces diremos que *a* es *divisible* por *b*. También decimos que *b* es *divisor* de *a*, o que *a* es *múltiplo* de *b*.

Así, 12 es divisible por 4, ya que $12 = 4 \times 3$ (también diremos que 4 divide a 12, que 4 es divisor de 12, o que 12 es múltiplo de 4). Sin embargo, 12 no es divisible por 5 al no encontrarse ningún entero que multiplicado por 5 dé 12. También podemos decir que el número entero *a* es divisible por otro entero *b* si la división es exacta, es decir, si al realizar la división el residuo es 0.

Los múltiplos de un número natural son los números que resultan de multiplicar ese número por otros números naturales.

Por ejemplo, los múltiplos del 7 son: 7, 14, 21, 28…

FICHERO

Conforme vas estudiando toma nota de los conceptos y procedimientos matemáticos. Escribe cada uno en tus palabras, como si te lo explicaras a ti mismo. Cuando realices los ejercicios consulta tus notas tantas veces como sea necesario.

También decimos que un número es múltiplo de otro si le contiene un número entero de veces. El 21 contiene al 7 tres veces, pues 21 = 7 × 3.

Todo número natural tiene un infinito de múltiplos. Es decir que, los **múltiplos** de un número natural son los números naturales que encontramos al ir saltando ese número a lo largo de todos los naturales, lo que equivale a ir multiplicando por ese número.

Otro ejemplo: los múltiplos de 6 son los números que encontramos al ir saltando de 6 en 6: 6, 12, 18, 24 y así sucesivamente, hasta el infinito.

Los **divisores** de un número natural son los números naturales que lo dividen. Por ejemplo, los divisores del 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

15 Completa el siguiente cuadro escribiendo "sí" si el número de la lista de la izquierda es divisible por el número correspondiente de la fila superior, y "no" si no lo es, como se muestra en el ejemplo. Recuerda contrastar tus respuestas en el Apéndice 1.

	2	3	4	5	7
20	Sí	No	Sí	Sí	No
60					
490					
125					
210					
49					
100					

SESIÓN 17 ¡CON QUE LOS NÚMEROS TAMBIÉN TIENEN PRIMOS!

Números primos

Los **números primos** son aquellos que sólo son divisibles por sí mismos y por el 1. Los **números compuestos** son los que tienen otros divisores además de sí mismos y la unidad.

Ejemplos de números primos: 5, 13, 23.

- ¿Cómo podríamos determinar cuáles de los números del 1 hasta el 50 son primos?

____

____

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué otros ejemplos de números primos conoces?

____

____

Para ello podemos usar la **Criba de Eratóstenes.**

16 Investiga en Internet o en alguna biblioteca quién fue Eratóstenes y en qué consiste la criba que lleva su nombre. Escribe brevemente los datos más relevantes sobre las aportaciones de este famoso matemático griego, y a continuación describe brevemente en qué consiste la Criba de Eratóstenes. Si lo requieres consulta el Apéndice 1.

Ahora encontraremos todos los números primos entre el 1 y el 50, usando la Criba de Eratóstenes. Sigue las instrucciones que se presentan a continuación.

Primero escribe una tabla con todos los números del 1 al 50.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

El 1 no es considerado ni primo ni compuesto, por lo tanto lo eliminamos de la lista. El 2 es número primo, ¿no es así? Sin embargo, sus múltiplos no lo son pues lo tienen a él como divisor. Entonces elimina del listado todos los números que son pares, es decir, múltiplos de 2.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

glosario

Criba: herramienta consistente en una lámina con espacios o perforaciones de determinado tamaño que se emplea para separar distintos granos entre ellos y de polvo o basura que los contaminan.

Más información en...

Consulta estas páginas:
http://www.astromia.com/biografias/eratostenes.htm
http://pinae.wordpress.com/2009/05/19/criba-de-eratostenes/

El siguiente número primo es el 3, pero sus múltiplos no lo son. Elimina entonces de la tabla los múltiplos de 3 que no se hayan tachado antes, es decir, los múltiplos de 3 que no son pares, como el 9 el 15, etcétera.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

El siguiente número primo es el 5, y también tachamos a sus múltiplos, de los cuales solo quedaban sin tachar el 25 y el 35.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

El siguiente número primo es el 7 y solamente queda un múltiplo suyo por quitar de la lista, el 49, ¡táchalo!

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

El número primo que sigue es el 11 y sus múltiplos previos a 50 ya han sido eliminados (22, 33 y 44). Por lo tanto, los números que quedan son todos primos, es decir que según la Criba de Eratóstenes los números primos entre 1 y 50 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Números compuestos

Los **números compuestos** se llaman así porque se componen del producto de números primos. Es como si los números primos fueran la materia prima para construir al resto de los números mediante multiplicaciones. Por ejemplo, el 6 se obtiene de multiplicar al 2 y al 3. El 12 se obtiene al multiplicar el 6 por 2. Por lo tanto, el $12 = 2 \times 2 \times 3$. Así, cada número compuesto puede descomponerse en una multiplicación de números primos que es única para dicho número. Se pueden utilizar exponentes para escribir esta descomposición en una manera simplificada.

Ejemplos:

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

$50 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$49 = 7 \times 7 = 7^2$

SESIÓN 18 ¿PARA QUÉ NOS SIRVEN LOS PRIMOS?

Descomposición en factores primos

Una herramienta que nos será muy útil a lo largo del tema de divisibilidad es la descomposición en factores primos. Ésta tiene aplicaciones prácticas en muchos campos. Se utiliza para encontrar divisores y múltiplos, para encontrar el común denominador en operaciones con fracciones, para la simplificación de fracciones, y en los últimos años su mayor aplicación está en la **criptografía**.

La **descomposición en factores primos** es el producto de números primos que dan como resultado un cierto número natural. Cada número natural tiene una única descomposición en factores primos.

¿Cómo puedo encontrar la descomposición en factores primos de un número determinado? Se trata de partir al número en los números primos que lo dividen. Si quiero encontrar la descomposición en factores primos de un número tengo que encontrar los números primos que lo dividen. Empiezo dividiendo por 2 todas las veces que se pueda, sigo con 3, luego con 5 y así sucesivamente, utilizando números primos del menor al mayor hasta que no pueda dividir más.

Por ejemplo, la descomposición en factores primos del 24 se efectua así:

Escribo el número y trazo una línea a su derecha; 24 es divisible por 2, por lo tanto coloco un 2 del lado derecho de la línea y divido entre 2. El resultado, 12, lo escribo debajo del 24. 12 también es divisible por 2, por lo tanto coloco un 2 al lado derecho del 12 y divido entre 2. El resultado, 6, lo coloco debajo del 12. Vuelvo a dividir entre 2, puesto que 6 también es divisible entre 2, y escribo el resultado, 3, que al ser primo solamente se puede dividir entre 3. Escribo un 3 a su lado derecho y divido entre 3 quedando como resultado 1.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

El resultado de la descomposición es la multiplicación de los números primos que se obtuvieron. Para escribirla de forma sintética, se utilizan exponentes. Por lo tanto: $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$.

glosario

Factor: cada uno de los términos de una multiplicación.

glosario

Criptografía: es la ciencia que trata del enmascaramiento de la comunicación, de modo que sólo resulte inteligible para la persona que posee la clave, o método para averiguar el significado oculto. En su sentido más amplio, la criptografía abarca el uso de mensajes encubiertos, códigos y cifras.

La descomposición en factores primos de 60 es la siguiente:

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Por lo tanto: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

Actividad 17

Encuentra la descomposición en factores primos de los siguientes números y escríbela en forma sintética:

100 | 350 | 385 | 2400 |

Recuerda consultar el Apéndice 1 para revisar tus respuestas y así asegurar que vas por el camino correcto.

SESIÓN 19 ¿Y CÓMO HAGO PARA OBTENER EL MÍNIMO QUE LOS MULTIPLICA?

Mínimo común múltiplo (MCM)

¿? Asesoría

Para identificar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, se suele utilizar la abreviación MCM o MCD respectivamente, seguida de un paréntesis con los números considerados. Por ejemplo: el mínimo común múltiplo de 16, 20 y 24 se escribe MCM (16, 20, 24).

El **mínimo común múltiplo (MCM)** de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero, es decir, es el número más pequeño que resulta de la multiplicación de cualquiera de los dos números.

Ejemplo: El MCM de 24 y 36:

Los múltiplos de 24 son: 24 (resultado de 24×1), 48 (de 24×2), **72** (de 24×3), 96 (de 24×4), etcétera.

Los múltiplos de 36 son: 36 (producto de 36×1), **72** (de 36×2), 108 (36×3), etcétera.

El número más pequeño, común a ambas listas de múltiplos es 72; por lo tanto: MCM (24, 36) = 72

Para encontrar el MCM de dos o más números, debemos obtener la descomposición en factores primos de éstos *y tomar a todos los números que aparezcan en al menos una de las descomposiciones, elevado a la potencia que sea la máxima.*

Por ejemplo, si queremos encontrar el MCM de 24 y 36:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

Aqui aparecen los números 2 y 3 en ambas descomposiciones. Para el 2 la potencia máxima es 3 y para el 3 es 2. Por lo tanto el MCM se obtiene multiplicando $2^3 \times 3^2 = 72$.

Si queremos encontrar el MCM de 50 y 48:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$50 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 5 \\ 12 & 5 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$

Tenemos al 2, al 3 y al 5. Para el 2 la potencia máxima es 4, para el 3 es 1 y para el 5 es 2. Por lo tanto el MCM se obtiene multiplicando $2^4 \times 3 \times 5^2 = 1200$.

El MCM de 12, 15 y 16

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$15 = 3 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

El MCM es: $2^4 \times 3 \times 5 = 240$

Actividad 18

Encuentra el MCM de los siguientes números:

A. 40 y 90
B. 15, 18 y 24
C. 20, 36 y 60
D. 100 y 150

¡No olvides consultar el Apéndice 1 para revisar tus respuestas!

SESIÓN 20 ¿Y AHORA PARA EL DIVISOR MÁS GRANDE, QUÉ HAGO?

Máximo común divisor (MCD)

El **máximo común divisor (MCD)** de dos o más números es el número más grande posible que es divisor de todos ellos.

Ejemplo:

El MCD de 24 y 36:

Los divisores de 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24

Los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36

El número más grande que divide a ambos es 12, por lo tanto:

MCD (24, 36) = 12

Al igual que en el caso del MCM, la descomposición en factores primos resulta muy útil para encontrar el MCD de dos o más números. En este caso, debemos obtener la descomposición en factores primos de estos y *tomar a todos los números que aparezcan en todas las descomposiciones, elevados a la potencia que sea la mínima.*

Por ejemplo, si queremos encontrar el MCD de 24 y 36:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

Tenemos 2 y 3 en ambas descomposiciones. Para 2 la potencia mínima es 2 y para 3 es 1. Por lo tanto, el MCD es: $2^2 \times 3 = 12$

Para encontrar el MCD de 84 y 80, descomponemos en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5$

Tenemos el número 2 en ambas descomposiciones con potencias 2 y 4. Por lo tanto, la potencia mínima es 2. No coinciden otros números en ambas descomposiciones, por lo tanto, el MCD de 84 y 80 es: $2^2 = 4$.

Así mismo, para encontrar el MCD de 24, 60 y 90 debemos obtener las descomposiciones en factores primos de cada uno de esos números.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

FICHERO

Elabora tu ficha de resumen sobre los conceptos y procedimientos relacionados con divisibilidad: divisores, múltiplos, números primos y compuestos, descomposición en primos, MCM y MCD. ¡No olvides incluir un ejemplo de cada uno!

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$

El número 2 coincide en las tres descomposiciones y la potencia mínima es 1. El número 3 también coincide en las tres descomposiciones con potencia mínima 1. El número 5 solamente coincide en dos de las descomposiciones y por ello no se considera. Por lo tanto, el MCD de 24, 60 y 90 es: $2 \times 3 = 6$

Actividad 19

Recuerda que en matemáticas, además de entender el proceso de las operaciones, debes practicar los procedimientos. Por ello te invitamos a encontrar el MCD de los siguientes números:

A. 75 y 90
B. 30, 36 y 48
C. 200 y 360
D. 100, 150 y 180

¿Cómo resolverías los siguientes problemas?

Para resolverlos puedes aplicar los conocimientos adquiridos en relación con el MCM y el MCD. Antes de ver las respuestas, intenta resolverlos por tu propia cuenta.

- En un patio del centro cívico, de 2,520 cm de largo por 1,980 cm de ancho, se requiere colar cemento en placas cuadradas lo más grandes posible y que esa medida sea un número entero, ¿cuál será la longitud del lado de cada placa?

- Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto y medio. A las 6:00 am coinciden los tres. Averigua cuántas veces volverán a coincidir en los próximos 10 minutos.

¿? Asesoría

Para que sea más fácil recordar… Para encontrar tanto el MCM como el MCD, se usa un procedimiento similar: descomponer los dos números en primos y utilizar todos los número que aparecen elevados a una potencia:

- En el mínimo común múltiplo utilizas los números primos con la potencia mayor. De este modo, sólo incluimos los números que aparecen en todas las descomposiciones.
- En el máximo común divisor empleas los números primos con la menor potencia. De este modo, incluimos los números que aparecen aunque sea en una de las descomposiciones.

Si te confunde cuándo usar la mayor o la menor potencia, piensa que la lógica es cruzada: ¡para el mínimo utilizas la máxima, y para la máxima, el mínimo!

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Utilizas estos conceptos en tu vida diaria? Presta atención a las situaciones en las cuales aplicas los números y analiza si los usas.

- El director de una escuela desea repartir 240 libros, 180 juegos de mesa y 300 chocolates entre un cierto número de alumnos, de modo que cada uno reciba un número exacto de cada cosa y reciba de los tres objetos. ¿Cuál es el mayor número de alumnos que puede beneficiarse?, ¿qué cantidad de cada cosa recibe cada alumno beneficiado?

- Encuentra la menor distancia que se puede medir exactamente con 3 reglas distintas, de 20, de 50 y 80 cm de largo cada una.

¡Analicemos ahora el caso del primer problema! Se requiere que las placas del patio del centro cívico sean cuadradas, es decir, que midan lo mismo de largo que de ancho, y que esa medida sea lo más grande posible. Entonces ese número debe ser el MCD (2520, 1980).

$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
$1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$

Por lo tanto, MCD (2520, 1980) = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$. Las placas deberán medir *180 cm* por lado.

El segundo problema requiere que encontremos en qué momento se volverán a encender los tres faros al mismo tiempo, después de haberse encendido juntos a las 6:00 am. El primer faro se enciende cada 12 segundos, es decir, pasados 12 segundos después de las 6:00, luego 24 segundos, 36 segundos, 48 segundos, y 60 segundos, o sea, un minuto después, y así sucesivamente, es decir, conforme los segundos coincidan con los múltiplos de 12. El segundo faro se enciende cada 18 segundos, o sea, 18 segundos después de las 6:00, 36 segundos, 54 segundos, y así sucesivamente. Finalmente, el último faro se enciende cada minuto y medio, o sea, 90 segundos después de las 6:00, 180 segundos, y así sucesivamente. El momento en que coincidirán todos será el MCM (12, 18, 90).

$12 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

Por lo tanto, MCM (12, 18, 90) = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ segundos, 3 minutos después de las 6:00; volverán a coincidir a las *6:03 am*, luego, 180 segundos después, a las 6:06 y, finalmente, a las 6:09. Por lo tanto, volverán a coincidir 3 veces en los siguientes 10 minutos.

Pasemos ahora al problema del director de la escuela. Desea repartir 240 libros, 180 juegos de mesa y 300 chocolates, de modo que cada alumno reciba la misma cantidad de cada cosa, es decir, que buscamos un divisor común de los tres números. Además se quiere beneficiar al mayor número posible de alumnos, por lo tanto queremos encontrar el máximo común divisor de 240, 180 y 300.

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$
MCD (240, 180, 300) = $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Por lo tanto, *60 alumnos* resultarían beneficiados recibiendo la misma cantidad de cada cosa.

¿Cuántos libros, juegos de mesa y chocolates recibiría cada alumno beneficiado?
Libros: $240 \div 60 = 4$
Juegos de mesa: $180 \div 60 = 3$
Chocolates: $300 \div 60 = 5$. Cada alumno recibiría *4 libros, 3 juegos de mesa y 5 chocolates*.

Por último, intentemos resolver el cuarto problema. Deseamos encontrar la menor distancia que se puede medir exactamente con una regla de 20 cm, una de 50 cm y una de 80 cm de largo.

Con la regla de 20 cm podemos medir exactamente distancias que sean múltiplos de 20, es decir, 20 cm, 40 cm, 60 cm, y así sucesivamente. Con la regla de 50 cm mediremos distancias que sean múltiplos de 50, es decir, 50 cm, 100 cm, etcétera. Finalmente, con la regla de 80 cm podemos medir de forma exacta distancias que sean múltiplos de 80, es decir, 80 cm, 160 cm, 240 cm.

Por lo tanto, estamos buscando el primer número que sea múltiplo de todos, o sea, el MCM (20, 50, 80).

$20 = 2^2 \times 5$
$50 = 2 \times 5^2$
$80 = 2^4 \times 5$

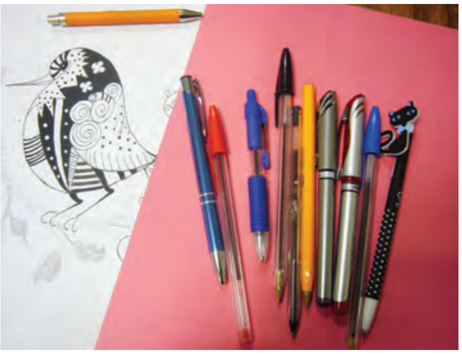
Por tanto, el MCM (20, 50, 80) = $2^4 \times 5^2 = 400$. Podemos medir exactamente *400 cm* con cada una de las tres reglas.

Actividad 20

Resuelve los siguientes problemas utilizando el MCM y el MCD.

glosario
Fajo: atado de cosas ligeras.

A. Un hombre tiene tres **fajos** de billetes. En uno tiene $3,150.00, en otro $5,200.00 y en el tercero $7,500.00 Si todos los billetes son iguales y de la mayor denominación posible, ¿cuánto vale cada billete y cuántos billetes hay en cada fajo?



B. Encuentra el menor número de plumas necesario para repartir entre tres grupos: el grupo A con 20 estudiantes, el grupo B con 25 estudiantes, y el grupo C con 30 estudiantes, de modo que cada grupo reciba el mismo número de plumas y que cada estudiante reciba un número entero de plumas. ¿Cuántas plumas recibirá cada estudiante del grupo A, del grupo B y del grupo C?

C. Tres autobuses salen de la misma ciudad, el primero cada 45 minutos, el segundo cada 60 minutos y el tercero cada 90 minutos. Si salieron juntos a las 6:30 de la mañana, ¿cuál será la hora más próxima en que volverán a salir juntos?

glosario
Parcela: porción pequeña de terreno, de ordinario resultante de dividir otra área mayor.

Más información en...
Sobre el tema de divisibilidad, mínimo común múltiplo y máximo común divisor, visita las siguientes paginas: http://www.omerique.net/twiki/pub/Recursos/Matemáticas NivelCIesGuadalpenamultiplosydivisores.pdf http://www.ditutor.com/divisibilidad/divisibilidad.html

D. El papá de Ángel tiene tres terrenos de 1,750, 2,500, y 2,625 m^2 de superficie respectivamente, que quiere dividir en **parcelas** iguales para que la escuela primaria de la comunidad pueda tener huertas colectivas y apoyar la alimentación de los niños y niñas que a ella asisten, ¿cuál ha de ser la superficie de cada parcela para que sean lo más grande posible?

Cuando termines, consulta el Apéndice 1 para revisar tus respuestas.

Ahora que sabes usar el MCM y el MCD para resolver ciertos problemas, es momento de volver a las interrogantes de Ángel y Claudia para probar tus nuevos conocimientos.

¡Actívate y responde el problema 8! ¿Qué saberes te pueden servir para responderlo?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué operaciones realizarías?

____

____

Recuerda que tienen dos tablones de madera que quieren aprovechar para construir una estantería. Uno de los tablones mide 216 cm de largo y el otro 120 cm. Quieren cortarlos en trozos que midan lo mismo y sean lo más largo posible sin que sobre nada. ¿Cuánto debe medir cada pedazo?, ¿cuántos pedazos se obtienen de cada tablón?

¡Respondamos la pregunta!

En este problema queremos partir, o dividir, dos tablones de diferente largo en partes iguales, por lo que necesitamos encontrar un divisor, que divida a ambos en partes de igual tamaño y que sean lo más largo posible. Es decir que queremos encontrar el MCD (216, 120), que será el tamaño de cada pedazo.

$216 = 2^3 \times 3^3$; $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

Por lo tanto, MCD (216, 120) $2^3 \times 3$, cada pedazo debe medir *24 cm*.

Para conocer el número de pedazos que obtendrán de cada tablón debemos saber cuántas veces cabe 24 en la medida de cada uno de ellos.

Del primer tablón obtendrán $216 \div 24 = 9$ pedazos, y del segundo obtendrán $120 \div 24 = 5$ pedazos.

¡Intenta resolver el problema 9!

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Y para resolver este, problema cómo lo harías?

____

____

Se trata de encontrar los días que deberán transcurrir para que coincidan los proveedores de café y de papel. El primero pasa cada 15 días y el segundo cada 24 días. Entonces el proveedor de café pasará al transcurrir 15, 30, 45 días, y así sucesivamente; el de papel pasará al transcurrir 24, 48, 72 días, y así sucesivamente. ¡Sí! Lo que buscamos es el MCM (15, 24)

$15 = 3 \times 5$
$24 = 2^3 \times 3$

Entonces, el MCM (15, 24) $= 2^3 \times 3 \times 5 = 120$. Por lo tanto, *deberán transcurrir 120 días para que ambos proveedores coincidan.*

Has aprendido a utilizar el MCM y el MCD para resolver situaciones similares a las que pueden presentarse en tu vida cotidiana. Prepara una ficha de resumen en la que escribas, con tus propias palabras, el significado de estos dos conceptos, con un ejemplo de cada uno.

Estás trabajando para resolver de manera autónoma problemas que impliquen la aplicación de las propiedades de la igualdad.

SESIÓN 21 IGUALES, PERO ¿ES LO MISMO CÓMO SE TRABAJEN?

Ecuaciones y propiedades de la igualdad

PROBLEMA 10 Ángel y Claudia quieren ofrecer otras bebidas calientes además de café. Están probando una nueva receta de chocolate. Ángel fue al mercado a comprar las cosas. Le dijo a Claudia, "Compré 3 kilos de chocolate más \$54.00 de leche y gasté \$267.00." Claudia quiere anotar el costo por cada kilo de chocolate, ¿Cuánto cuesta el kilo de chocolate?

Es común que en nuestra vida cotidiana nos topemos con ciertos problemas en los que necesitamos determinar una cantidad desconocida: cuando queremos obtener la medida de un terreno, el costo de algún artículo, las cantidades en los ingredientes de una receta de cocina, etcétera. Para encontrar la cantidad buscada se requiere realizar una serie de operaciones, dependiendo del problema.

Este tipo de operaciones en las que se consideran cantidades desconocidas, se llaman ecuaciones.

Imagina la siguiente situación:

Andrés piensa un número, lo multiplica por 5, luego le suma 1, después le saca raíz cuadrada, luego le resta 2. El resultado que obtiene es 4. ¿Qué número pensó Andrés?

En este tipo de situaciones debemos hacer las operaciones de regreso para ir rastreando al número buscado, como si fueramos detectives. No conocemos el número pero tenemos cierta información que nos permitirá encontrarlo.

$$? \rightarrow \times 5 \rightarrow + 1 \rightarrow \sqrt{\ } \rightarrow - 2 \rightarrow = 4$$

Para encontrarlo debemos partir del resultado e ir de regreso, haciendo las operaciones inversas. Por ejemplo, si lo último que hizo Andrés fue restarle 2 a un número y obtuvo 4, ese número debió ser 6, pues $6 - 2 = 4$, y 6 es el número que obtenemos al sumarle 2 a 4, o sea, al realizar la operación inversa. Por lo tanto, empezamos sumando 2 al cuatro, y así seguimos con el resto de las operaciones.

$4 + 2 = 6 \rightarrow 6^2 = 36 \rightarrow 36 - 1 = 35 \rightarrow 35 \div 5 = 7$. ¡Lo encontramos! El número que pensó Andrés es 7.

Para escribir situaciones como la de Andrés, que involucran números desconocidos que deseamos encontrar, se utilizan las ecuaciones. Una **ecuación** es una igualdad en cuyos miembros hay letras y números relacionados por operaciones aritméticas. A las letras les llamamos **incógnitas**, y representan cantidades desconocidas.

glosario

Incógnita: cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación o en un problema.

El problema 10 tiene una incógnita, el precio del chocolate. Para resolver esa interrogante debemos expresar la situación mediante una ecuación, y realizar ciertos pasos para poder encontrar el valor de la incógnita.

Veamos otro ejemplo. Si no conocemos la edad de la hermana de Luis, pero sabemos que él tiene 17 años y que tiene cinco años más que ella. La incógnita es la edad de la hermana de Luis. Utilizamos una letra para representar esa cantidad desconocida y entonces podemos escribir la siguiente ecuación: $x + 5 = 17$, donde x es la incógnita que representa, en este caso, la edad de la hermana de Luis. Si mi problema fuera conocer su edad, entonces para resolverlo solo necesito averiguar el valor de la x.

Con el fin de encontrar los valores de las incógnitas en una ecuación, es necesario ir transformando la ecuación hasta que la incógnita quede de un lado y los números que se conocen del otro, pero sin alterar la igualdad. De esta manera una vez realizadas las operaciones matemáticas implicadas sabremos el valor de la incógnita.

Para hacer esas transformaciones se deben usar las **propiedades de la igualdad**, que se enuncian a continuación.

FICHERO

Las propiedades de la igualdad son esenciales para realizar las transformaciones que se requieren en una ecuación para resolverla. Presta especial atención a ellas y resúmelas. ¡Esta ficha te será muy útil en los módulos en que trabajes con las matemáticas!

1. **Propiedad de la suma.** Si a, b y c son números reales cualesquiera tales que $a = b$, entonces $a + c = b + c$. En otras palabras, puedo sumar el mismo número a los dos lados de la igualdad y seguirá siendo una igualdad.
   Ejemplo:

   $3 + 2 = 4 + 1$. Ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si sumo 7 de los dos lados, ahora ambos serán iguales a 12. $3 + 2 + 7 = 4 + 1 + 7$

   Sumar una cantidad de ambos lados de la ecuación nos permite pasar números de un lado a otro a partir de sumar los **inversos aditivos** de un número. Por ejemplo, si tenemos $x + 4 = 15$, entonces sumamos -4 de ambos lados de la ecuación y lo que sucederá es que del lado izquierdo se eliminará el 4, y del lado derecho aparecerá un -4, pero éste lo podemos sumar con el 15. Es decir que el 4 pasará del otro lado de la igualdad con el signo inverso.

   $x + 4 - 4 = 15 - 4$. Como $+4 - 4 = 0$, del lado derecho solo queda la x y la ecuación ahora es $x = 15 - 4$, si los términos del lado derecho se restan nos queda entonces $x = 11$.
2. **Propiedad de la multiplicación.** Si a, b y c son números reales cualesquiera tales que $a = b$, entonces $a \times c = b \times c$, es decir, puedo multiplicar los dos lados de la igualdad por el mismo número sin afectar la igualdad.
   Ejemplo:

   $3 + 2 = 4 + 1$, ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si multiplico por 2 a los dos lados, ahora ambos serán iguales a 10.

   $(3 + 2) \times 2 = (4 + 1) \times 2$

Multiplicar una cantidad de ambos lados de la ecuación nos será útil para dejar sola a la incógnita cuando se encuentra dividida por un número. Si multiplicamos por el **inverso multiplicativo** de este número, nos dará 1, y entonces $x \times 1 = x$.

Por ejemplo, si tenemos la ecuacion: $\frac{x}{5} = 6$, y multiplicamos por 5 a ambos lados de la igualdad, $5 \times \frac{x}{5} = 5 \times 6$, entonces del lado izquierdo estoy multiplicando por 5 y dividiendo entre 5, y eso es igual a 1. Por lo tanto sólo nos queda x, y del lado derecho podemos multiplicar los números que ahí se encuentran, quedando la ecuación $x = 6 \times 5 = 30$

3. **Propiedad de la división.** Si a, b y c son números reales cualesquiera tales que $a = b$, y $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

   Ejemplo:

   $3 + 2 = 4 + 1$, ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si divido por 2 de los dos lados, $\frac{3+2}{2} = \frac{4+1}{2}$, ahora ambos son iguales a 2.5.

   Dividir una cantidad de ambos lados de la ecuación nos ayudará para dejar sola a la incógnita cuando se encuentra multiplicada por un número. Si dividimos por el inverso multiplicativo de este número, obtendremos 1 y de nuevo tenemos que $x \times 1 = x$.

   Por ejemplo, si tenemos la ecuación: $7x = 35$ y dividimos entre 7 de ambos lados de la ecuación, tendremos $\frac{7x}{7} = \frac{35}{7}$; del lado izquierdo $\frac{7}{7} = 1$ y queda la x sola, del lado derecho hacemos la división y quedará entonces $x = 5$.

4. **Propiedad de la potencia**. Si a, y b son números reales cualesquiera tales que $a = b$, entonces $a^n = b^n$.

   Ejemplo:

   $3 + 2 = 4 + 1$, ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si elevo al cuadrado de los dos lados, ahora ambos son iguales a 25, $(3 + 2)^2 = (4 + 1)^2$

   Esta propiedad es útil cuando encontramos raíces en las ecuaciones. Por ejemplo: $\sqrt[3]{x} = 5$. Elevar al cubo a ambos lados de la ecuación nos permite dejar sola a la x pues elevar al cubo y sacar raíz cúbica son operaciones inversas y devuelven el mismo número. Por lo tanto: $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 5^3$. Del lado izquierdo obtenemos x, y del lado derecho realizamos la operación: $x = 125$.

5. **Propiedad de la raíz.** Si a, y b son números reales cualesquiera tales que $a = b$, entonces $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

   Ejemplo:

   $3 + 2 = 4 + 1$, ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si obtengo la raíz cuadrada de los dos lados $\sqrt{3+2} = \sqrt{4+1}$, ahora ambos son iguales a 2.236067…

Esta propiedad nos sirve cuando encontramos potencias en las ecuaciones. Por ejemplo: $x^3 = 512$. Utilizando el mismo razonamiento que en la propiedad anterior, de que elevar al cubo y sacar raíz cúbica son operaciones inversas y devuelven el mismo número, ahora corresponde obtener la raíz cúbica de ambos lados de la ecuación. Por lo tanto: $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{512}$, del lado izquierdo obtenemos x, y del lado derecho realizamos la operación y la ecuación queda $x = 8$

Como puedes ver en los ejemplos, las propiedades de la igualdad se utilizan para resolver ecuaciones, es decir, para encontrar las incógnitas de éstas. Para lograrlo debemos *despejar* la x, que significa dejarla sola en uno de los lados de la ecuación. Esto es de gran utilidad para resolver problemas.

Regresemos al problema de la edad de la hermana de Luis. Podemos utilizar la propiedad de la suma para resolver la ecuación que representa su edad: $x + 5 = 17$. Sumas -5 de ambos lados sin alterar la ecuación, pues $+5 - 5 = 0$, y de este modo queda sola la x: $x + 5 - 5 = 17 - 5$ y obtienes la siguiente ecuación: $x = 12$

¡Ahora sé que la edad de la hermana de Luis es 12 años!

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Cómo resolverías estas ecuaciones?

$x - 4 = 7$

$x + \frac{2}{5} = \frac{4}{7}$

Para la primera ecuación: $x - 4 = 7$ sólo necesito aplicar la propiedad de la suma y sumar 4 en ambos lados. $x - 4 + 4 = 7 + 4$, $x = 11$

En el caso de la segunda ecuación: $x + \frac{2}{5} = \frac{4}{7}$, sumo $-\frac{2}{5}$ en ambos lados usando la propiedad de la suma $x + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{7} - \frac{2}{5}$, quedando entonces $x = \frac{4}{7} - \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$

Actividad 21

Encuentra el valor de la incógnita utilizando la propiedad de la suma.

A. $x + 8 = 15$

B. $x - 9 = -3$

C. $x - \frac{7}{4} = -\frac{17}{8}$

D. $x - 14 = 17$

Revisa tus respuestas en el Apéndice 1, seguro que son correctas.

Las ecuaciones que necesitamos resolver pueden ser más complejas. Ahora supongamos que no conoces la cantidad de dinero que gana María, sin embargo sabes que la mitad de su salario la gasta en la colegiatura de su hijo y también sabes que la colegiatura es de \$4,600.00. ¿Cómo puedes conocer el salario de María?

Como la mitad de su salario es 4,600, entonces $\frac{x}{2} = 4{,}600$

Aquí te conviene aplicar la propiedad de la multiplicación, pues si multiplicas por 2 de ambos lados la igualdad se mantiene y te quedaría la siguiente ecuación:

$\left(\frac{x}{2}\right)\times 2 = 4{,}600\times 2$. En el caso de la x, si la multiplico por 2 y se está dividiendo entre 2 me da como resultado la misma x, pues sabemos que $\frac{2}{2}$ = 1 y ello no altera la igualdad. Por eso decimos que es un **neutro multiplicativo**.

Entonces tendremos que: $\left(\frac{x}{2}\right)\times 2 = 4{,}600\times 2$, x = 9,200 ¡Has encontrado el salario de María! Ella gana $9,200.00.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

Reflexiona y resuelve el siguiente problema.

El triple de la edad de Jorge es igual a la edad de su padre; si su padre tiene 48 años, ¿qué edad tiene Jorge?

Debes comenzar por plantear la ecuación que representa la edad de Jorge en relación con la de su papá: $3x$ = 48. Aquí el 3 junto a la x indica multiplicación. Si multiplicamos por el inverso multiplicativo de 3, o sea, por $\frac{1}{3}$ dejamos sola a la x, pues estará multiplicada por 1: $\frac{1}{3}\cdot\ 3x = \frac{1}{3}\cdot\ 48$, x = 16

Lo anterior es equivalente a aplicar la propiedad de la división. Podemos pensar en dividir por 3 ambos lados de la ecuación original: $\frac{3x}{3} = \frac{48}{3}$, x = 16

Actividad 22

Encuentra la incógnita utilizando la propiedad de la multiplicación.

A. $5x = 15$

B. $\frac{1}{4}x = 13$

C. $\frac{2}{3}x = 8$

Consulta el Apéndice 1 para revisar tus respuestas.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Cómo resolverías el problema siguiente?

Supongamos que el área de un cuadrado es de 36 m^2, ¿cuánto medirá su perímetro?

Efectivamente, para encontrar el perímetro del cuadrado, primero necesitamos encontrar la medida de sus lados. Si x es la incógnita que representa el lado del cuadrado, entonces el perímetro sera igual a 4 veces x: $P = 4x$

Entonces, ¿cómo podemos encontrar x? Sabemos que el área del cuadrado es igual a 36 m^2 y se obtiene al multiplicar lado por lado. La ecuación que expresa el área es la siguiente: $x^2 = 36$. Ahora podemos usar la propiedad de la raíz, que permite obtener la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación con el fin de dejar a la x sola.

Recuerda que existen dos números que satisfacen que su cuadrado es igual a 36, el 6 y el –6. Sin embargo, x representa una distancia y por lo tanto no puede ser negativa. Entonces, $x = 6$, tenemos pues que $P = 4 \times 6 = 24$ metros.

Del mismo modo usamos la propiedad de la potencia para despejar a la x en caso de que esté dentro de una raíz.

Por ejemplo, si tenemos la siguiente ecuación: $\sqrt[3]{x} = 7$

Elevamos a la potencia 3 a ambos lados de la ecuación $\sqrt[3]{x}^{3} = 7^3$ para despejar a x, $x = 343$

FICHERO

¡No olvides elaborar tu ficha sobre las propiedades de la igualdad! Registra en tu bitácora aquellas situaciones en las cuales utilizas alguna ecuación y analiza si la resuelves aplicando las propiedades de la igualdad. Toma nota de tus conclusiones.

Actividad 23

Encuentra la incógnita utilizando las propiedades de la potencia y de la raíz.

A. $x^3 = 216$

B. $\sqrt[4]{x} = 5$

C. $\sqrt[4]{x^2} = 2$

Contrasta tus respuestas con las del Apéndice. Has aprendido a utilizar las propiedades de la igualdad para resolver ecuaciones sencillas. Esto te será de gran utilidad en la Unidad 2, en la que aprenderás a resolver muchos tipos de ecuaciones. Además, ahora podemos resolver el problema 10.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cómo la resolvemos?
- ¿Qué propiedades de la igualdad debemos utilizar?

Sabemos que Ángel le dijo a Claudia: “Compré 3 kilos de chocolate más $54.00 de leche y gasté $267.00. ¿Cuánto cuesta el kilo de chocolate?”

El precio del chocolate es la incógnita, que expresamos con una x. Como compró 3 kilos entonces tenemos 3 veces x, más los $54.00 de la leche, lo que dió un total de $267.00. Por lo tanto, la ecuación que representa al problema es: $3x + 54 = 267$

Vamos a utilizar la propiedad de la suma y la de la división. Primero aplicaremos la de la suma, sumando –54 de ambos lados de la igualdad. $3x + 54 - 54 = 267 - 54$; queda $3x = 213$. Ahora aplicamos la propiedad de la división, dividiendo entre 3 de ambos lados. $\frac{3x}{3} = \frac{213}{3}$ entonces queda $x = 71$. *El kilo de chocolate costó $71.00.*

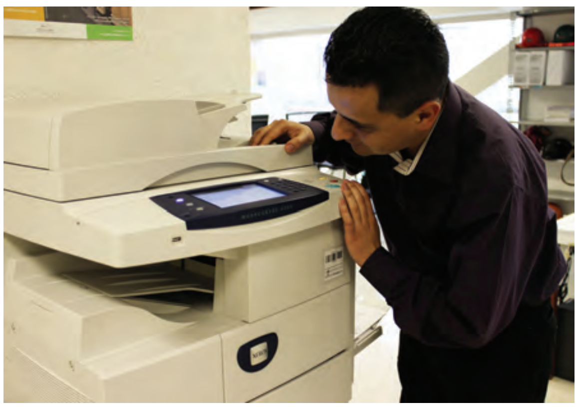
SESIÓN 22 TODO TIENE SU RAZÓN, Y TAMBIÉN SU PROPORCIÓN

Razones y proporciones

Estás trabajando para resolver problemas diversos aplicando razones y proporciones.

¡Estamos a punto de concluir la Unidad 1! Únicamente queda un problema por resolver.

PROBLEMA 11 Claudia y Ángel van a necesitar una fotocopiadora y han estado buscando los mejores precios. Encuentran una tienda en la que el costo normal de una fotocopiadora es de $4,300.00, sin embargo en este momento tiene un 15% de descuento, ¿cuánto deberán pagar por ella?

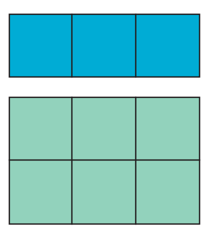


Como verás este problema hace mención a un porcentaje. ¿Qué es un porcentaje? Un porcentaje es un tipo de proporción, entonces, ¿qué es una proporción?, una proporción se forma con dos razones, y ¿qué es una razón? A continuación aprenderás los conceptos de razón, proporción y porcentaje.

Supongamos que se realiza una encuesta entre jóvenes de entre 15 y 20 años para saber si practican algún deporte. Si 7 de cada 10 jóvenes contestan que sí practican un deporte, se dice que $\frac{7}{10}$ es la razón de jóvenes, entre 15 y 20 años, que practican un deporte. ¿Qué información me da ese cociente?

Una **razón** entre dos cantidades es una comparación entre éstas con el fin de determinar cuántas veces cabe una en la otra, y se obtiene al dividir una cantidad entre la otra.

Por ejemplo, para comparar las magnitudes 6 y 3, realizo la siguiente división: $6 \div 3 = 2$, y el resultado me indica que 6 es 2 veces mayor que 3; o que 3 cabe 2 veces en 6 o, si divido $3 \div 6 = \frac{1}{2}$ el resultado me indica que 3 es la mitad de 6.



3 cabe 2 veces en 6,

o 6 es el doble de 3

Si en un salón de clase hay 12 hombres y 18 mujeres, entonces la razón de hombres a mujeres es: $12 \square 18 = \frac{2}{3}$, esto significa que por cada 2 hombres hay 3 mujeres. También se escribe de la siguiente manera: 2 : 3 y se lee “la razón de hombres a mujeres es 2 a 3”.

Para comparar cantidades se requiere que ambas estén en la misma unidad de medición. Por ejemplo, si queremos comparar sesenta centavos con tres pesos, primero debemos pasar los pesos a centavos para tener ambas cantidades en las mismas unidades.

Entonces, \$1 = ¢ 100, por lo tanto, la razón de sesenta centavos a tres pesos es igual a la razon de 60 a 300: $\frac{60}{300} = \frac{1}{5} = 1:5$

En una razón el resultado se presenta en su forma más simple, para eso se requiere saber simplificar fracciones.

SESIÓN 23 ¿SI ES MÁS SIMPLE ES MÁS FÁCIL?

Simplificación de fracciones

Habíamos visto que las fracciones equivalentes son aquellas en las que tanto el numerador como el denominador de una son *k* veces el numerador y el denominador de la otra. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$

Por ejemplo:

Cuando queremos expresar la razón entre dos cantidades, debemos hacerlo a partir de su forma más simplificada, es decir, aquella en la que el numerador y el denominador son lo más pequeños posible.

En el ejemplo anterior, de las fracciones entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{600}{800}$ y todas las demás fracciones equivalentes a éstas, como por ejemplo $\frac{6}{8}$, la más simple de todas es $\frac{3}{4}$ ya que es la que tiene el numerador y el denominador más pequeños.

Entonces, **simplificar** una fracción es transformarla en una fracción equivalente más simple. Para hacerlo, dividimos numerador y denominador por un mismo número, por ejemplo, para $\frac{24}{20}$ debemos dividir tanto el numerador como el denominador entre 4, que es el divisor más grande en común, o el MCD (24, 20).

$$\frac{24}{20} = \frac{24 \div 4}{20 \div 4} = \frac{6}{5}$$

Para simplificar $\frac{18}{54}$ dividimos al numerador y al denominador entre el MCD (18, 54) = 18, $\frac{18}{54} = \frac{18 \div 18}{54 \div 18} = \frac{1}{3}$.

Actividad 24

A. Simplifica las siguientes fracciones; al hacerlo aplica el procedimiento que has estudiado para la obtención del MCD:

a. $\frac{63}{81}$

b. $\frac{180}{240}$

c. $\frac{300}{75}$

B. Resuelve las siguientes situaciones problemáticas:

a. En una escuela hay 200 hombres y 180 mujeres, ¿cuál es la razón de hombres a mujeres?, ¿cuál es la razón de mujeres a hombres?

b. Un estudiante contestó 12 de 18 preguntas correctamente en el examen A y 20 de 24 preguntas en el examen B. ¿En cuál examen obtuvo mejor calificación?

Recuerda revisar tus respuestas en el Apéndice 1.

Sesión 24. ¿Está todo bien proporcionado?

Propiedades de una proporción

Una **razón** es la relación que existe entre dos magnitudes. En la medida en que una de estas varía, la otra deberá variar también para que la relación entre ellas se mantenga. Es decir que, por ejemplo, si al pintar una valla utilizo cierta cantidad de litros de pintura, al doble de metros cuadrados de valla corresponderá el doble de litros de pintura, es decir, que se debe tener una razón equivalente entre metros de valla y litros de pintura. Cuando dos razones son iguales, aunque tengan diferentes números, tendremos una **proporción**.

Piensa en una receta de cocina. Piensa, por ejemplo, que quieres hacer un pastel. Supongamos que la receta es para 20 personas, y en la receta se especifica la cantidad que se requiere de cada ingrediente, lo que significa que cada ingrediente está en razón del número de personas. ¿Qué debes hacer si quieres cocinar el mismo

pastel para 30 personas? Debes conservar la misma razón, pero con otras cantidades, lo que significa que requieres de una proporción.

Tendrás que incrementar la cantidad requerida de cada ingrediente en la misma medida, y ésta estará en razón de lo que incrementó el número de personas, es decir, 2:3, ¿no es así? Si el pastel llevaba una cucharadita de polvo para hornear, necesitas que la nueva cantidad forme con el 1 una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ para que la razón sea igual. Es decir, que: $\frac{2}{3} = \frac{1}{x}$

¡Esto es una proporción!

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Por ejemplo, la razón de 7 : 5 es igual que la de 21 : 15, por lo tanto $\frac{7}{5} = \frac{21}{15}$

La expresión anterior es una proporción y se lee "7 es a 5 como 21 es a 15".

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ llamamos *extremos* a las cantidades *a* y *d;* denominamos *medios* a las cantidades *b* y *c*.

La siguiente propiedad de las proporciones es la más importante porque es la más utilizada: **Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces se cumple que $ad = bc$**

Ejemplo: $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ y se cumple que $4 \times 15 = 5 \times 12$, $60 = 60$

Otras propiedades importantes son:

1. **Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$**

   Ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ y si intercambiamos al 4 y al 12, también se cumple que $\frac{3}{12} = \frac{4}{16}$

2. **Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$**

   Ejemplo: $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$ y, si intercambiamos los numeradores con los denominadores de ambas razones, también se cumple que $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$

3. **Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$**

   Ejemplo: $\frac{9}{5} = \frac{36}{20}$ y si mantenemos los mismos denominadores (5 *y* 20 respectivamente) pero sumamos numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el numerador ($9 + 5 = 14$ y $36 + 20 = 56$ respectivamente), también se cumple que $\frac{14}{5} = \frac{56}{20}$

4. **Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$**

Ejemplo: $\frac{28}{21} = \frac{4}{3}$ y si mantenemos los mismos denominadores (21 y 3 respectivamente) pero restamos numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el numerador ($28 - 21 = 7$ *y* $4 - 3 = 1$ respectivamente), también se cumple que $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

5. **Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$**

Ejemplo: $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$ y sumamos numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el numerador ($5 + 2 = 7$ *y* $15 + 6 = 21$ respectivamente) restamos numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el denominador ($5 - 3 = 2$ *y* $15 - 6 = 9$ respectivamente), también se cumple que $\frac{7}{3} = \frac{21}{9}$

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cómo podemos resolver este problema?

____

____

Las propiedades de las proporciones nos pueden servir para resolver cierto tipo de problemas. Por ejemplo, si sé que mi automóvil recorre 120 km con 16 litros de gasolina, ¿cuánta gasolina necesitará para hacer un recorrido de 200 km?

Para resolverlo podemos usar la primera propiedad de las proporciones. ¿Cómo? Además vamos a ayudarnos de las propiedades de la igualdad, puesto que tenemos una incógnita, es decir, un número desconocido, que es la cantidad de gasolina que requiero para hacer el recorrido de 200 km. A esa incógnita la podemos llamar x y despejarla en la igualdad que se forme a partir de la proporción definida en el problema.

Queremos encontrar la cantidad de gasolina que sea proporcional en relación con la distancia recorrida en kilómetros. La razón que ya conozco es la del incremento de los kilómetros de los recorridos y puedo plantearla en cualquiera de sus formas: $120 : 200$ o $\frac{120}{200}$. La razón que desconozco es la de la gasolina; pues sólo tengo el 16 y me falta el otro número, ésa es mi incógnita. Usando una x, puedo plantear la razón: $16 : x$ o $\frac{16}{x}$. Como quiero que los incrementos sean proporcionales, entonces igualo las razones: $\frac{120}{200} = \frac{16}{x}$

Por la primera propiedad sabemos que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Por lo tanto: $x \times 120 = 16 \times 200$

Ahora, aplicando las propiedades de la igualdad, dividimos entre 120 a ambos lados: $\frac{x \cdot 120}{120} = \frac{16 \cdot 200}{120}$, despejamos y queda $x = \frac{16 \cdot 200}{120} = 26.666$ litros de gasolina.

Imagina que un reloj se atrasa dos segundos cada seis horas, ¿cuántas horas se atrasará en dos días? Inténtalo primero antes de continuar.

¡Recuerda que en una proporción las cantidades deben expresarse en las mismas unidades! Dos días equivalen a $24 \times 2 = 48$ horas. Entonces, ¿cuál es la razón que ya conozco? Las horas: 6 y 48 que puedo plantear como $\frac{48}{6}$. ¿Cuál es la razón que necesito encontrar? Los segundos de atraso, sólo sé que se atrasa 2 segundos cada 6 horas. La razón que busco es: $\frac{x}{6}$.

$\frac{48}{6} = \frac{x}{2}$, despejando tenemos que $x \times 6 = 48 \times 2$; dividimos entre 6 para despejar x: $\frac{x \cdot 6}{6} = \frac{48 \cdot 2}{6}$ resolviendo tenemos que $x =$ *16 segundos*.

Actividad 25

Resuelve los siguientes problemas utilizando proporciones.

A. Un coche gasta 15 litros de gasolina en 180 kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrerá con 24 litros?

B. Un grifo vierte 8 litros de agua en una hora, ¿cuántos litros verterá en 25 minutos?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cómo podemos resolver el problema?

¿? Asesoría

El reto para resolver problemas de proporciones es plantear bien las ecuaciones que te ayudarán a llegar a la solución. Recuerda que una proporción implica la igualdad de dos razones. Identifica primero la razón que ya conoces y escríbela como cociente. Después, analiza la razón que estás buscando y ten claro que parte de ella ya la conoces. Escríbela también como cociente; para la que desconoces, usa una *x*.

¡Ojo! Ten cuidado de escribir ambas razones en el mismo orden.

Más información en...

Sobre razones, proporciones y porcentajes, consulta las siguientes páginas: http://web.ing.puc.cl/~milopez/preuing/algebra/ag5.pdf, http://www.disfrutalasmatemáticas.com/números/porcentajes.html, http://www.preparatoriaabierta.com.mx/matemáticas-1/razones.php].

C. En un mapa hecho a escala, 2 cm representan 100 km. Si en el mapa 2 ciudades se encuentran a 5 cm de distancia, ¿a qué distancia real se encuentran entre sí?

Consulta el Apéndice 1 para revisar tus respuestas. Seguro estarás muy satisfecho, pero si tienes dudas que tú solo no puedes resolver, solicita apoyo académico, por medio del servicio de Asesoría Académica que se ofrece en los Centros de Servicio de Preparatoria Abierta en Línea, o con alguien de tu confianza que sea bueno en matemáticas.

¿? Asesoría

Una proporción discreta es aquella cuyos medios no son iguales; por ejemplo $\frac{2}{8}=\frac{5}{20}$, y una proporción continua es aquella que tiene los medios iguales; por ejemplo $\frac{2}{6}=\frac{6}{18}$.

Hay un tipo de razón que utilizamos con mucha frecuencia en la vida cotidiana: el porcentaje, que te encuentras en los descuentos, los impuestos, la medición de la grasa corporal, los intereses bancarios. ¡Estudiémoslo!

La razón de un número a 100 se llama **porcentaje**. Si dividimos un total en cien partes iguales y tomamos x cantidad de esas cien partes, a eso lo llamamos $x\%$, que se lee "x por ciento". Por ejemplo, si de 300 libros que hay en la biblioteca, has leído 15 libros, entonces ya leíste el 5% de los libros de la biblioteca.

$\frac{300}{15}=\frac{100}{x}$, despejando $x=\frac{100\times 15}{300}=\frac{1{,}500}{300}=5$, pues 5 es a 100 como 15 es a 300.

Para resolver problemas con porcentajes debemos encontrar el número que falta en una proporción en la que una de las razones contiene a 100. Veamos algunos ejemplos.

1. Si Carlos se comió 12 chocolates y se comió el 60% de los chocolates de la caja, ¿cuántos chocolates contenía la caja?

   $\frac{60}{100}=\frac{12}{x}$, despejando $x \times 60 = 12 \times 100$, $x=\frac{1{,}200}{60}=20$ chocolates

2. Ana desea comprar un automóvil cuyo precio es \$150,000.00, pero además deberá pagar un impuesto de 17% del precio, ¿cuánto pagará en total?

   Ana deberá pagar el 100% del precio, más otro 17%, es decir, el 117% del precio original. Por lo tanto, queremos saber cuánto representa en dinero el 117% del precio.

   $\frac{117}{100}=\frac{x}{150{,}000}$, $x \times 100 = 150{,}000 \times 117$, despejando $x=\frac{117\times 150{,}000}{100}=175{,}500$ es el total a pagar por el coche.

3. Juan compra unos zapatos cuyo precio original era \$450.00, sin embargo, ese día la tienda tenía un 20% de descuento en toda su mercancía. ¿Cuánto pagó por los zapatos?

Esta vez debemos calcular el 80% del precio original ya que la tienda está descontando el 20% del total del precio.

$\frac{80}{100}=\frac{x}{450}$, $x \times 100 = 450 \times 80$, despejando $x=\frac{450\cdot 80}{100}=360$ es el precio que Juan pagó por los zapatos.

4. Si el año pasado el ingreso por concepto de ventas de un negocio fue de \$850,000.00 y en este año fue de \$977,500.00, ¿cuál fue el porcentaje de incremento del ingreso?

$\frac{977{,}500}{850{,}000}=\frac{x}{100}$, $x \times 850{,}000 = 977{,}500 \times 100$, despejando

$x=\frac{977{,}500\times 100}{850{,}000}=115$ %, 15% sobre las ventas del año anterior.

¿Te queda claro cómo calcular el porcentaje? ¡Realiza los siguientes ejercicios para corroborarlo!

Actividad 26

A. De los 1,200 estudiantes de una preparatoria, 800 han ido al museo de ciencia, ¿qué porcentaje de estudiantes ha ido al museo?

B. Una televisión cuyo precio el año pasado era \$4,000.00 cuesta en la actualidad \$200.00 más, ¿cuál es el porcentaje de incremento del precio?

C. Alberto gana \$13,500.00 actualmente, ¿cuánto ganaría si su salario se incrementara un 7%?

D. ¿Cuánto costará una computadora cuyo precio regular es \$16,000.00, si tiene un 15% de descuento?

Para revisar tus respuestas, consulta el Apéndice 1.

¡Nota cuánto has aprendido! Es el momento de responder la última interrogante, el problema 11. ¡Intenta hacerlo tú solo primero!

Recuerda que Claudia y Ángel necesitan adquirir una fotocopiadora. Su costo normal es de \$4,300.00, sin embargo en este momento tiene un 15% de descuento, ¿cuánto deberán pagar por ella?

Para resolver este problema debemos usar una proporción para calcular el 85% del precio original. $\frac{85}{100}=\frac{x}{4{,}300}$, despejando la x, $x=\frac{4{,}300\times 85}{100}=3{,}655$ *deberán pagar por la fotocopiadora.*

¡Felicidades! Has logrado resolver todas las interrogantes planteadas a lo largo de la unidad con base en el estudio de los números reales y sus operaciones.

¿Qué tanto aprendiste?, ¿cómo se modificaron tus competencias aritméticas?, ¿aprendiste algún procedimiento nuevo?

Para terminar colorea en la siguiente lista de cotejo tu nivel de avance. Recuerda tomar en cuenta que el máximo es 5 y el mínimo 1.

FICHERO

Elabora la última ficha de la unidad: resume los conceptos y principios relacionados con las razones y proporciones. ¿Qué es lo esencial a recordar?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

Reflexiona sobre cómo el estudio de esta unidad te ayudó a consolidar tu dominio de la aritmética.

Utilizar operaciones algebraicas con polinomios para la solución de problemas					
Criterios de desempeño	Nivel de desempeño				
	1	2	3	4	5
Sé identificar los subconjuntos de los números reales (enteros, racionales, reales).					
Sé identificar datos y el cuestionamiento del problema.					
Sé realizar operaciones con números reales (enteros y racionales).					
Sé aplicar los criterios de divisibilidad para resolver problemas (mínimo común múltiplo, máximo común divisor).					
Sé resolver problemas relacionados con mi entorno utilizando razones y proporciones.					

Si tu nivel de avance en alguno de estos indicadores es 3 o menos, revisa de nuevo la unidad para alcanzar el nivel suficiente que te permita continuar con seguridad la Unidad 2.

CIERRE

SESIÓN 25 Y PARA TERMINAR...

Seguramente en varias ocasiones te has encontrado con interrogantes similares a las de Ángel y Claudia. Si has estado elaborando tu bitácora, te habrás dado cuenta que te enfrentas a números y problemas relacionados con estos con mucha frecuencia. ¿Cuáles números reales tienes que manejar?, ¿en qué situaciones de tu vida cotidiana has necesitado realizar operaciones con ellos?

Para concluir esta unidad deberás buscar tres problemas que requieran de los números reales para ser resueltos; trata de contemplar los temas estudiados:

- Operaciones con los números enteros
- Operaciones con números racionales (fracciones)
- Divisibilidad (mínimo común múltiplo, máximo común divisor)
- Propiedades de los exponentes
- Razones y proporciones.

Utiliza tu bitácora como referencia para identificar y tomar ideas. También ten presentes los problemas que se les presentaron a Claudia y a Ángel y que contemplan situaciones que se te pudieran presentar si decidieras emprender un negocio, hacer un viaje, o comprar artículos en una tienda.

Registra en los espacios siguientes los tres problemas que has encontrado, incluyendo:

1. El planteamiento del problema en lenguaje común.
2. El tipo de número que involucra este problema.
3. Los pasos a seguir para resolver el problema.
4. El resultado.
5. Los conceptos o principios matemáticos que has aplicado para llegar a la solución.

Para realizar esta actividad consulta las fichas de resumen que has ido elaborando y aplica los conceptos y procedimientos que anotaste. Aprovecha este momento para volverlas a revisar y verificar que los has aprendido.

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Cuando termines de plantear estos problemas revísalos con el apoyo de alguien cercano a ti: un familiar, amigo o miembro de tu comunidad que sea bueno en matemáticas. Busca a un asesor presencial o virtual si no tienes a quien recurrir.

¡Felicidades! !Has concluido la primera unidad!

UNIDAD 2

Lenguaje algebraico

¿Qué voy a aprender y cómo?

Como habrás notado en la Unidad 1, para iniciar un negocio se debe trabajar muy duro y planificar cada etapa con el fin de obtener beneficios. Para comenzar la planeación es primordial identificar qué se tiene, qué se necesita, qué falta y cómo se puede conseguir lo necesario para llegar a buen término. En la unidad anterior, los procedimientos y conceptos aritméticos te permitieron resolver situaciones problemáticas, sin embargo, en ocasiones, hay problemas que involucran cantidades desconocidas y en los que la aritmética resulta insuficiente. ¿Cómo solucionarlas entonces? ¿Cómo enfrentar esos problemas cuando se tienen cantidades conocidas y desconocidas? Mediante el álgebra, la parte de la matemática que estudia las estructuras, las relaciones y las cantidades y que se encarga de operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) utilizando símbolos (*a, x, y*) en lugar de números (1, 2, 9). El uso de símbolos permite hacer referencia a números desconocidos (incógnitas), lo que posibilita el desarrollo de ecuaciones y el análisis correspondiente a su resolución. De este modo se pueden utilizar expresiones algebraicas para resolver una gama más amplia de situaciones problemáticas.

Propósito

El propósito de esta unidad es que te enfrentes a la resolución de situaciones problemáticas utilizando el lenguaje algebraico y diferentes métodos algorítmicos.

Saberes

El eje de tu trabajo es el análisis y la solución de problemas diversos con el álgebra. En primer lugar, aprenderás a manejar el lenguaje algebraico y a formular expresiones algebraicas, de tal manera que puedas convertir con facilidad el lenguaje común a algebraico y viceversa.

Después, estudiarás cómo resolver operaciones con polinomios y factorizar expresiones algebraicas, de tal manera que puedas transformar y simplificar dichas operaciones para encontrar su solución.

También conocerás diversos métodos para resolver ecuaciones de dos tipos: lineales y cuadráticas, así como sistemas de ecuaciones lineales.

Para terminar, te familiarizarás con la graficación de ecuaciones como alternativa para resolverlas.

A lo largo de todo el proceso aplicarás una metodología de solución de problemas que te permitirá abordar las situaciones aquí propuestas para enfrentarte a problemáticas de tu vida cotidiana. Para llegar a buen término es básico que asumas una actitud de autonomía, pues trabajarás por tu propia cuenta; que seas analítico al establecer las relaciones de las variables involucradas en la situación; y que te muestres creativo y sistemático en la instrumentación de la metodología de resolución de problemas.

¿Cuáles serán los resultados de mi trabajo?

Para lograr resolver situaciones problemáticas desarrollarás las competencias para:

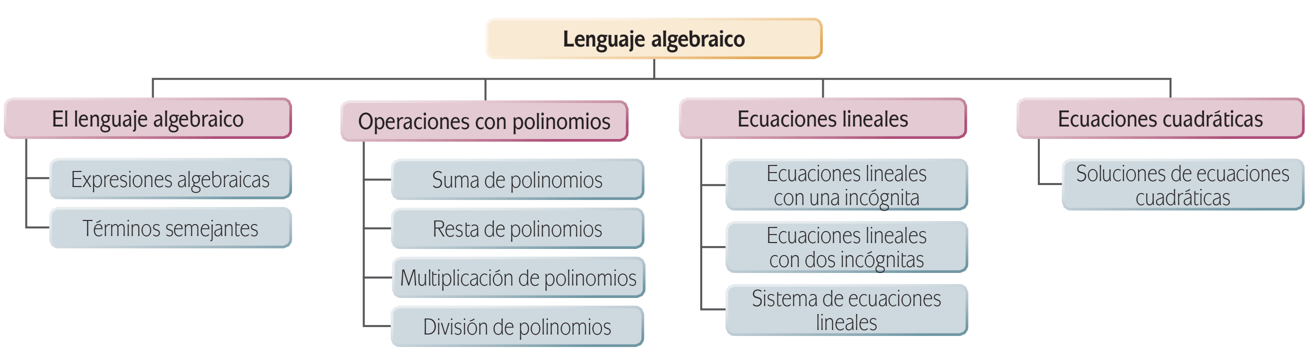
- Expresar algebraicamente dichas situaciones problemáticas usando tu sentido analítico al relacionar las variables.
- Utilizar operaciones algebraicas con polinomios para la solución de problemas.
- Encontrar y proponer soluciones a situaciones de tu entorno donde apliques ecuaciones lineales con coeficientes enteros o fraccionarios y las representes gráficamente.
- Emplear ecuaciones cuadráticas en la resolución de situaciones problemáticas.

Tu plan de trabajo

Tiempo

Así como lo hiciste para la unidad 1, es recomendable que organices tu estudio en sesiones de trabajo mínimo de una hora. También es aconsejable que las programes de tal forma que procures concluir una actividad o un proceso completo, y que consideres un tiempo estimado de 55 horas de estudio para esta unidad. Siéntate en un sitio cómodo, en un lugar apropiado, en donde no haya distractores ni ruido y que puedas concentrarte mejor.

En el siguiente esquema se enuncian los contenidos básicos de la unidad, y la propuesta lógica de su abordaje, pero si tú ya posees algunos conocimientos sobre el lenguaje algebraico, tal vez puedas establecer tu propio orden.



Forma de trabajo

Para trabajar con eficiencia, lee de manera analítica las explicaciones tanto de los conceptos como de los procedimientos así como los datos de los problemas. Hacerlo te permitirá aplicar y manipular de forma adecuada el lenguaje algebraico en la resolución de problemas.

- Cuando se te planteen preguntas, detente a reflexionar sobre ellas antes de continuar.
- Desarrolla el proceso de análisis completo que se requiere para modelar y resolver los problemas, no te limites a buscar sólo el resultado.
- Procura tener a la mano un cuaderno o papel de reciclaje para realizar operaciones y dibujos.
- Verifica tus respuestas a los problemas y actividades consultando el Apéndice 1, pues hacerlo te dará seguridad para continuar trabajando.
- Si no llevaste a cabo el proceso de resolución o tu respuesta es errónea no renuncies, comienza de nuevo. Lee una vez más el problema, distingue los datos y lo que se te pide que resuelvas. Ve paso a paso y rectifica el procedimiento y la solución de cada uno de los pasos.
- La síntesis es una herramienta de construcción del aprendizaje, es recomendable que conforme avances en cada uno de los temas, elabores una ficha de resumen de los conceptos, principios, procedimientos relacionados y ejemplos. Tus fichas serán un recurso de consulta, una especie de "acordeón", que te resultará muy útil. Al reunirlas conformarás un fichero de fácil consulta continua.
- Reflexiona sobre tu aprendizaje de forma constante. Si te es útil elabora una bitácora, como aquella que hiciste en la unidad dos del módulo *De la información al conocimiento*, respondiendo qué hiciste, cómo te sentiste al trabajar y qué aprendiste.
- Se sugieren altos al término de cada sesión; en estos lugares sugeridos, o en cualquier otro en que detengas el estudio, será una buena idea que cuando reanudes el estudio en una nueva sesión repases, aunque sea de manera somera, la última sesión estudiada, tanto para refrescar los conocimientos como para arrancar la nueva sesión con la seguridad de lo bien aprendido.
- Es importante contar con el apoyo de alguien que te auxilie a valorar tu aprendizaje y superar dificultades, sobretodo en el área de matemáticas. Busca quién pueda hacerlo; puede ser un familiar o conocido con conocimientos de álgebra o puedes recurrir a un asesor presencial o virtual. Averigua si hay un Centro de Servicio de Preparartoria Abierta cercano a ti o consulta la página electrónica de la Preparatoria Abierta en Línea para obtenerla.
- Es fundamental que tengas acceso a una computadora conectada a Internet para buscar información y realizar prácticas adicionales. Éstas te servirán sobre todo si enfrentas dificultades para comprender los conceptos y procedimientos algebraicos considerados. Si no tienes una computadora en casa, puedes acceder a ella en un cibercafé, un centro comunitario o una escuela o biblioteca.
- También se te sugiere que tengas a la mano un fólder o carpeta donde archives tus ejercicios y fichas de resumen.

¿Iniciamos?

INICIO

El lenguaje algebraico

Estás trabajando para expresar algebraicamente las situaciones problemáticas que se te presentan usando tu sentido analítico al relacionar las variables.

SESIÓN 1 ¿QUÉ INVERSIÓN SE REQUIERE PARA ECHAR A ANDAR UNA ESCUELA DE FUTBOL?

"El futbol es un gran negocio" así lo expresan los analistas deportivos y de negocios y lo ejemplifican hablando de las ganancias que los equipos profesionales obtienen tanto en la taquilla como por la venta de los derechos de transmisión de los partidos a las empresas de televisión y radio. También se comprueba la afirmación por las ganancias que se alcanzan gracias a la explotación de la marca del equipo en anuncios de ropa deportiva y la generación de productos para venta como las camisetas, los vasos, los llaveros, las banderas y banderines, etcétera. Sin embargo, el mejor negocio de futbol son las escuelas para la práctica de ese deporte. En México existen más de 5,000 de diversos tipos. ¿Tenías idea de ello?

Un grupo de personas decide reunirse para crear una escuela de futbol en su colonia. Uno de ellos leyó sobre el tema y otros dos entrevistaron al dueño de una escuela con canchas propias. Éste les explicó cómo abrió su negocio, paso a paso.

Lo primero que indicó es que se requiere de un terreno con dimensiones suficientes para construir las instalaciones: canchas de pasto natural para torneos, canchas para entrenamiento, gradas, áreas de servicios múltiples, áreas verdes, cafetería o comedor, estacionamiento, vestidores y baños, entre otras cosas. Además, hizo hincapié en la necesidad de tener personal para el arbitraje, la utilería y recoger balones, así como para la cuestión administrativa. También les habló de los gastos en equipo como balones, redes, etcétera y de lo necesario para el funcionamiento de la cafetería.

Les comentó que su aportación inicial fue de $350,000.00 hace ya varios años, y que a *grosso modo* destina entre 35 y 40 por ciento de los ingresos por cuotas al pago del personal; el 10% lo invierte en mantenimiento y el saldo es para la administración y un margen de utilidad.

Les advierte lo importante que es conseguir por lo menos 30 equipos que usen las instalaciones y que las canchas permitan la atención de 180 jugadores al mismo tiempo.

Con la información obtenida, los colonos comenzaron a reunirse para tomar decisiones sobre su proyecto. Durante las primeras reuniones fueron más las interrogantes que las acciones, pues todavía les faltaban datos. ¿Te ha pasado algo similar?, ¿has querido emprender un proyecto y tienes más dudas que certezas?

He aquí algunas de las dudas que surgieron en las reuniones:

- ¿Por dónde empezar?
- ¿Cuánto dinero convendría invertir en cada rubro para echar a andar la escuela?
- ¿Cúal es la inversión total de los colonos para construir la escuela de futbol?
- ¿Cómo empezar a promover la escuela?
- ¿Cómo organizar la planeación de los gastos?
- ¿Cómo calcular los últimos detalles?
- ¿Cuánto mediría el área de entrenamiento?

Vuelve a leer la información y revisa qué datos precisos tienen los vecinos y anótalos en el siguiente espacio.

Ahora busca los datos que desconozcas y toma nota de ellos a continuación.

Por último reflexiona, si estuvieras en un proyecto semejante al descrito, ¿por dónde empezarías? ¿Qué harías primero?

DESARROLLO

SESIÓN 2 ¿POR DÓNDE EMPEZAR?

PROBLEMA 1 Los colonos deciden consultar a un asesor financiero para que los oriente. Éste les recomienda, además de tener el terreno adecuado, invertir la tercera parte del dinero en acondicionar las canchas para lo cual requerirían determinar si serán de pasto natural o sintético. Destinar dos terceras partes de lo que les quede en construir los vestidores y reservar $40,000.00 para comenzar la construcción de la cafetería.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Cuánto dinero necesitan para iniciar el negocio? ¿Tú puedes encontrar la solución a esta interrogante? ¿Qué tendrías que hacer? Empieza por recordar lo que has aprendido en tus estudios anteriores y con base en ello, analiza la situación. La siguiente pregunta puede ser una guía para tu análisis. **¿Cómo se puede expresar este problema en una forma tal que permita hacer operaciones y llegar a la solución?** Leelo con detenimiento para identificar los datos y el cuestionamiento de la situación e intenta escribir una expresión matemática que la describa.

Con seguridad al analizar el problema y reflexionar en él te diste cuenta que le falta un dato; claro, no está la cantidad de dinero que se requiere para iniciar el negocio. En álgebra, a los datos desconocidos que se involucran en los problemas se les conoce como **incógnitas** y se expresan dentro de las operaciones mediante letras o literales. A ese lenguaje que se genera al utilizar letras y números para la resolución de problemas se le conoce como **lenguaje algebraico**.

Para solucionar situaciones problemáticas, además de entender el lenguaje algebraico se necesita aprender a generar y manipular expresiones algebraicas. Suena complicado, ¿no es así? Sin embargo no lo es tanto, como podrás comprobarlo en el estudio de esta unidad.

Además, no debes perder de vista que el lenguaje y las expresiones algebraicas pueden serte de utilidad para comprender y solucionar cuestiones cotidianas como la siguiente:

Margarita abrió una tienda de vestidos y un diseñador de imagen le recomendó que para llamar la atención podría colocar en el aparador prendas de colores gris, verde y rosa. La sugerencia específica fue que la mitad fueran vestidos de color gris, más dos abrigos grises; de las prendas que quedaran, la mitad fueran vestidos de color verde más dos abrigos de color verde y que la mitad de las prendas sobrante fueran vestidos de color rosa más dos abrigos de color rosa. Además, debería colocar un vestido negro. ¿Cuántas prendas requiere Margarita para el aparador? ¿Qué harías tú para encontrar el número y contestar la pregunta planteada?

Hacer cálculos mentales resulta complejo y, como desconocemos algunas cantidades, no podemos expresar las operaciones con números. Entonces, para resolver habría que formularlo en términos de una ecuación con una incógnita en la que se represente el número que buscamos; es decir, habría que traducir el problema al lenguaje algebraico para generalizar las diferentes operaciones que se utilizan en aritmética.

¿Cómo? Por ejemplo, para hablar de la suma de dos números cualesquiera sin especificar a qué números nos referimos basta con decir $x + y$, donde las letras x y y representan a dos números cualquiera, que auxilian a describir las relaciones generales que surgen en problemas de la vida cotidiana.

Además de los números que estudiaste en la unidad anterior, en el lenguaje algebraico también se utilizan letras que representan números desconocidos. Así, si se pretende expresar en lenguaje algebraico “el cuadrado de la suma de dos números reales es igual a la suma de sus cuadrados más el doble de su producto”, se genera una expresión de la siguiente manera:

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

Pero esa es sólo una frase. ¿Cómo se expresa en lenguaje algebraico un problema como el de Margarita? Por ahora baste dejar señalado el problema, que resolveremos más adelante.

Parece complicado, ¿no es así? Sin embargo, solamente se traducirá el lenguaje común a lenguaje algebraico y se escribirá el problema de Margarita en términos de una ecuación. A partir de la ecuación se encontrará el número desconocido x que representa el número de prendas.

Más información en...

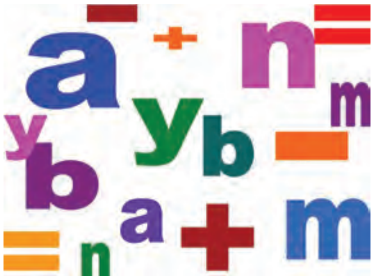
Sobre el lenguaje algebraico, consulta el siguiente documento: http://mail.udgvirtual.udg.mx/biblioteca/bitstream/123456789/1875/1/Lenguaje_algebraico.pdf. http://docente.ucol.mx/grios/algebra/lenguaje algebraico.htm http://www.comesed.com/Sb/sbt92.htm

SESIÓN 3 ¿DE LENGUAJE COMÚN A LENGUAJE ALGEBRAICO?

Ahora reflexiona, ¿qué tendrías que hacer para resolver una situación problemática similiar a la de Margarita, o de tu vida cotidiana? Claro, para empezar hay que traducir el lenguaje común a lenguaje algebraico. ¿Comienzas a hacerlo?

Ya vimos que las literales son letras que representan números desconocidos o números cualesquiera. Ejemplos:

a = un número cualquiera
b = un número cualquiera
x = un número cualquiera



Para la resolución de situaciones problema, en el lenguaje algebraico además de las literales se utilizan los signos de las operaciones aritméticas comunes tales como +, –, ·, ÷, etcétera. Así, si se pretende expresar “la suma de dos números” en lenguaje algebraico se haría de la siguiente forma:

$$a + b$$

Ahora, si se pretendiera leer una representación como la siguiente:

$$x - y$$

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Cómo escribirías "el doble de un número"?, ¿y "la mitad de un número"?

se interpretaría como "la resta (o diferencia) de dos números", y así con el resto de las operaciones.

La multiplicación, en el lenguaje algebraico, no siempre requiere de un signo. Cuando colocamos una letra junto a la otra, significa que se están multiplicando, por lo tanto, ab representa "el producto de dos números". Y "un número menos siete" se expresa así: $x - 7$

En efecto, "el doble de un número" se escribe: $2x$ o $2n$, y "la mitad de un número" se escribe: $\frac{x}{2}$ o $x \div 2$ o $\frac{1}{2}x$

"El cociente de dos números" se escribe: $\frac{x}{y}$ o $\frac{a}{b}$

Y "la raíz cúbica del producto de dos números": $\sqrt[3]{mn}$

"La mitad de la suma de dos números": $\frac{x+y}{2}$

Y "el triple del cuadrado de la diferencia de dos números" $3(a - b)^2$

Así como se puede traducir del lenguaje común al algebraico se puede hacer a la inversa, de lenguaje algebraico al común; tal y como lo explica el siguiente ejemplo: si yo leo $5x - 2$, su traducción al lenguaje común será: "Cinco veces un número, menos dos".

Si leo $\sqrt[5]{p-q}$ su traducción será: "La raíz quinta de la diferencia de dos números".

Y si leo $(a + b)^3$, su traducción será: "El cubo de la suma de dos números".

Actividad 2

Traduce del lenguaje común al algebraico y viceversa.

A. Las siguientes expresiones están en lenguaje común. Anota en la línea su traducción a lenguaje algebraico.

a) El cubo de un número: ______________________

b) La suma de los cuadrados de dos números: ______________________

c) El cuadrado de la suma de dos números: ______________________

d) La cuarta parte de la raíz cuadrada de un número: ______________________

e) El doble del cociente de dos números: ______________________

f) El cuádruple de la suma de tres números: ______________________

g) El cuadrado de un número más el triple de ese número: ______________________

h) Seis menos un número: ______________________

B. Ahora intenta traducir al lenguaje común las siguientes expresiones algebraicas:

a) abc ______________________

b) $x + 5$ ______________________

c) $\frac{mn}{2}$ ______________________

d) $4(p - q)$ ______________________

e) $\frac{\sqrt[3]{a}}{5}$ ______________________

f) $\frac{x}{y}^{2}$ ______________________

g) $2x - 3$ ______________________

h) n^4 ______________________

Verifica tus respuestas en el Apéndice 1. Seguramente podrás mejorar si es que encuentras algún error en tus respuestas.

¿Cómo vas por ahora? ¿Te sientes capacitado para trabajar con la situación de la construcción de la escuela de futbol por los colonos? Intenta entenderlo.

PROBLEMA 1 No se sabe cuál es la cantidad que los colonos deben invertir para operar la escuela. Lo que sí es claro es que la tercera parte se invierte en acondicionar las canchas y dos terceras partes de lo que les quede se invierte en los vestidores, sin olvidar que deberán tener $40,000.00 para la cafetería.

Si llamamos x a la cantidad de dinero inicial, ¿cómo podrías expresar la tercera parte de esta cantidad?: $\frac{1}{3}x$. ¿Y dos tercios de lo que quedó?: $\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}x\right)$

En la cafetería se invertirán $40,000.00. Esta cantidad no contiene incógnitas.

¡Ya tenemos algo! Poco a poco, conforme domines el lenguaje algebraico, construirás la expresión que describe éste y otros problemas más complicados.

Actividad 3

Traduce a lenguaje algebraico las siguientes situaciones, por ahora no necesitas resolverlas. Si tienes dudas, consulta el Apéndice 1.

A. La edad de María es el triple que la de su hija, si María tiene 27 años, ¿cuántos años tiene su hija? ______________________

B. Si el perímetro de un cuadrado es 84 cm, ¿cuánto miden los lados? ______________________

____

____

Gestión del aprendizaje

Para despejar una variable necesitas transformar la ecuación que tienes utilizando las propiedades de la igualdad. ¿Recuerdas que las estudiaste en la Unidad 1 de este curso? Revisa la ficha de resumen que elaboraste para poder aplicarlas con facilidad. ¡Serán un recurso muy importante para la solución de problemas algebraicos!

C. El señor Pérez gastó la mitad de su dinero en carne y \$20.00 en limones. Le quedaron \$6. 00. ¿Cuánto dinero tenía? ______________________

____

D. Encuentra dos números tales que su suma es 45 y el mayor es el doble del menor.

____

____

SESIÓN 4 ¿CUÁNTO DINERO SE DEBE INVERTIR EN CADA RUBRO PARA QUE LA ESCUELA DE FUTBOL PUEDA FUNCIONAR?

Con lo que has aprendido hasta ahora ya puedes traducir situaciones sencillas del lenguaje común al lenguaje algebraico, pero para saber con cuánto dinero deben contar los colonos para que la escuela de futbol pueda funcionar, además de plantear el problema en lenguaje algebraico habría que resolverlo llevando a cabo diversas operaciones. Ya sabes hacer operaciones aritméticas, ¿tienes idea de cómo resolver las algebraicas? Continúa.

Expresiones algebraicas

A las expresiones que involucran operaciones con números desconocidos se les denomina **expresiones algebraicas**. Cuando éstas llevan el signo que denota igualdad se les conoce como **ecuaciones** y son éstas las que permiten solucionar problemas.

Para resolver ecuaciones es básico saber manipular de manera adecuada cualquier tipo de expresiones algebraicas. En ese sentido, habría que tener claro qué se puede hacer y qué no se puede hacer al trabajar expresiones algebraicas complejas.

Una expresión algebraica es, pues, un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones aritméticas, tal y como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$4x^2 - 3y$$

$$5a^3b + 3a + 2b$$

$$\sqrt{2x+y} - \frac{7}{x^5}$$

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

Revisa cuántos términos tienen los ejemplos anteriores. Claro, en el primero de ellos se identifican dos términos algebraicos, mientras que en el segundo tres y en el tercero, dos.

Una expresión algebraica se forma a partir de términos algebraicos separados entre sí por los signos de + y –.

$$\underbrace{4x^2 - 3y}_{\uparrow \quad \uparrow}$$

2 términos

A un término algebraico lo conforman un coeficiente numérico y una parte literal. El **coeficiente numérico** es la cantidad numérica que se encuentra a la izquierda de la parte literal, y que indica la cantidad de veces que ésta se debe sumar o restar dependiendo del signo que tenga.

$$\text{Coeficiente numérico} \rightarrow 5\,\underbrace{x^2y}_{\substack{\text{parte}\\ \text{literal}}}$$

Así, por ejemplo, si se analiza la expresión $7x^4$ se tiene que:

En el primer término, el coeficiente numérico es 7 y ello quiere decir que x^4 se suma siete veces: $7x^4 = x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4$

En el término $-3n^2$, el coeficiente numérico es -3 y me indica que debo restar la parte literal 3 veces: $-3n^2 = -n^2 - n^2 - n^2$

Aunque en el término a^5 no aparece un número, el coeficiente numérico es 1, por lo que indica que el término se suma una vez.

La parte literal de una expresión algebraica está constituida por las letras y sus exponentes. Por ejemplo, para el término $7x^4$ la parte literal corresponde a $x^4 = x \times x \times x \times x$, y para el término $-3n^2$ la parte literal es $n^2 = n \times n$.

El grado de un término algebraico es la suma de los exponentes de los factores de la parte literal. Por ejemplo: $5x$ es un término de primer grado, o de grado 1.

Recuerda cuando el exponente o el coeficiente numérico es 1, no lo escribimos. Por lo tanto, x significa que se suma una vez (porque su coeficiente numérico es 1) y que se multiplica por sí mismo una vez (porque su exponente es 1). La suma de los exponentes del término es 1.

En la expresión $-9a^3b^4$ el grado del término es séptimo o siete. El exponente de a es 3 y el de b es 4. La suma de los exponentes es $3 + 4 = 7$.

$3mn$ es un término de segundo grado o de grado 2. El exponente de m es 1 y el de n, también es 1, por lo tanto, $1 + 1 = 2$.

ab^3 es un término de cuarto grado o de grado 4. El exponente de a es 1 y el de b es 3: $3 + 1 = 4$.

8 es un término de grado 0, con cero literales. Recuerda que x^0 es igual a 1.

Sesión 5 Para expresarlo bien, conocerlo bien

Actividad 4

Continua trabajando con el lenguaje algebraico. Para cada término de la columna de la izquierda, escribe el coeficiente númerico, la parte literal y el grado:

	coeficiente numérico	parte literal	grado
$9x$			
$-3a^3b^4c$			

FICHERO

Prepara una ficha de resumen con los principales conceptos relacionados con el lenguaje algebraico: literal, expresión algebraica, término algebraico, coeficiente numérico, grado de un término algebraico.

Busca mayor información a la proporcionada hasta ahora. Consulta uno de los libros de álgebra sugeridos en la bibliografía, al final de este material. Si tienes posibilidad, consulta por Internet.

Después de leer una o dos definiciones sobre cada concepto escribe en tus propias palabras tu definición y anota un ejemplo que consideres muy claro de tu vida cotidiana. Por ejemplo, recuerda cuánto gastaste el día de ayer y aquel monto que no venga a tu memoria represéntalo como una incógnita. No olvides tomar en cuenta cada rubro que pagaste y que cada rubro puede conformarse de varios más, por ejemplo, el transporte, del que pagaste varios diferentes.

¿? Asesoría

¡Recuerda que los exponentes señalan cuántas veces se multiplica por sí misma una literal! Al analizar términos algebraicos para ver si son semejantes, presta atención a los exponentes de cada literal. Los términos que tienen las mismas letras, pero con diferentes exponentes, no son semejantes.

$\frac{3}{5}x$			
$-m^5n$			
4			

¿Estas seguro(a) de tus respuestas? Consulta el Apéndice 1. ¡Volvamos al problema 1, sobre la escuela de futbol! ¿Cómo se expresaría mediante el lenguaje del álgebra?

Hasta el momento tenemos que de x pesos, ellos requieren un gasto de $\frac{1}{3}x$ para adecuar las canchas y $\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)$ en construir los vestidores y otros $40,000 para la cafetería. Por lo tanto, si sumamos esas tres cantidades obtendremos el total del dinero: $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)+40{,}000=x$

Para avanzar en la resolución de este problema, debemos saber cómo manipular esta expresión para encontrar el valor de x.

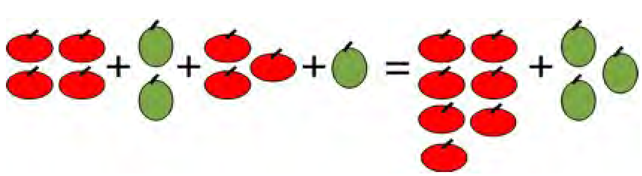
En una expresión algebraica se presentan **términos semejantes**, es decir que tienen la misma parte literal o las mismas letras tal y como lo puedes observar en los siguientes ejemplos: $8m^2n^3$ y $-3m^2n^3$ son términos semejantes porque ambos tienen la misma parte literal: m^2n^3

$\frac{1}{5}x^3yz^5$ y x^3yz^5 son términos semejantes porque ambos tienen la misma parte literal: x^3yz^5.

Sin embargo, $5a^3b^2$ y $-7a^2b^3$ **no** son términos semejantes porque no tienen la misma parte literal (el primer término tiene tres *a*'s y dos *b*'s multiplicándose y el segundo término tiene dos *a*'s y tres *b*'s multiplicándose): $aaabb \neq aabbb$

Un objetivo continuo al resolver ecuaciones para encontrar las incógnitas es tener expresiones cada vez más sencillas, y una forma de simplificar es juntar los varios términos que son iguales en uno solo. Este proceso consiste en reducir términos semejantes. En una expresión algebraica esto significa sumar o restar los coeficientes numéricos de aquellos términos con la misma parte literal. Se suman o restan los coeficientes numéricos y se conserva la parte literal; ello significa juntar en uno solo todos los términos que sean del mismo tipo. Un ejemplo claro podría ser el siguiente: *Tengo 4 manzanas + 2 peras + 3 manzanas + 1 pera.*

Lo mismo se podría expresar de forma más reducida así: *Tengo 7 manzanas + 3 peras.*



En el lenguaje algebraico hacemos lo mismo para reducir términos. Ejemplos:

$-4x - 7x = -11x$

$12a^3b + 25a^3b = 37a^3b$

$-5xy^2z + 13xy^2z = 8xy^2z$

$\frac{1}{5}n + n - 3n = -\frac{9}{5}n$

$5a + 4b - a + 3b = 4a + 7b$

$2x^2y + 3xy^2 - 6x^2y - 2xy^2 = -4x^2y + xy^2$

Más información en...

Sobre términos semejantes, consulta las siguientes ligas: http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Algebra1ReducirTermSemej.htm
http://www.sectormatematica.cl/media/NM1/NM1_algebra%20.doc

Sesión 6. ¿Son iguales o solo se parecen mucho?

Actividad 5

Sigue tu trabajo con el lenguaje algebraico.

A. Identifica los términos semejantes de las siguientes expresiones algebraicas y redúcelos.

a. $3m - 5m + m =$

b. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{6}x^2 =$

c. $-3ab + 5a^2b - 7ab - 12a^2b =$

d. $5a^3 - 3a^2 + 4 - 8a^3 + 10 =$

e. $3x - 4y + 2z + x - \frac{2}{3}y - 5z =$

B. Lee el siguiente problema, identifica y escribe los datos y el cuestionamiento. Intenta traducirlo a lenguaje algebraico, simplifica su expresión reduciendo términos y explica las ventajas que tiene reducir.

En una obra de teatro los números de los asientos de tres personas son tres números consecutivos que suman 72. ¿Qué número de asiento tienen esas personas?

glosario

Consecutivo: que sigue o sucede a otro.

Los **números consecutivos** son números enteros que se siguen el uno al otro en orden, del menor al mayor. Por ejemplo, 11, 12, 13, 14 y 15 son cinco números consecutivos; 7, 8 y 9 son tres números consecutivos.

FICHERO

Elabora una ficha de resumen con el concepto de términos semejantes y la forma de reducirlos. Complementa la explicación con ejemplos de lenguaje algebraico que generes con base en situaciones cotidianas. ¿Algunas de las expresiones incluyen términos semejantes? ¡Analízalas! Si no encuentras ejemplos en tu vida cotidiana, búscalos en algún libro de texto o en Internet. Es importante que identifiques cómo se aplican estos conceptos y procedimientos para lograr el dominio de las competencias que se busca alcanzar en este módulo.

Autoevalúate

¿Comprueba si ya dominas la traducción del lenguaje común al algebraico para resolver situaciones? Señala en la siguiente lista de cotejo tu nivel de avance. Toma en cuenta que el máximo es 5 y el mínimo 1.

Expresar algebraicamente las situaciones problemáticas que se me presentan usando mi sentido analítico al relacionar variables					
Criterios de desempeño	**Nivel de desempeño**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Sé identificar los datos del problema.					
Sé determinar cuál es el cuestionamiento del problema.					
Sé traducir del lenguaje común al algebraico.					
Sé simplificar el lenguaje algebraico para resolverlo.					

Si alguna de tus respuestas equivale a 3 o menos, te sugerimos repases el tema, para poder continuar sin tropiezos tu estudio.

Poco a poco has aprendido a traducir problemas sencillos al lenguaje algebraico para resolverlos. De no ser así, ten paciencia y busca asesoría ahora, pues todavía queda camino por andar para expresar y resolver situaciones problemáticas más complejas. ¡Continuemos!

SESIÓN 7 YA LO SÉ ESCRIBIR, ¿SÉ TRADUCIRLO PARA OBTENER RESULTADOS?

Como has revisado hasta este momento, son varios los factores que habría que tomar en cuenta para que funcione la escuela de futbol, ¿recuerdas algunos de ellos? ¿Puedes enumerar más de cinco?

Hasta ahora has concentrado tus esfuerzos en la traducción de situaciones problema a lenguaje algebraico, porque es el primer paso para resolverlas pero, ¿qué sigue?, por supuesto, llevar a cabo las operaciones necesarias para obtener el resultado.

Las operaciones aritméticas, como ya lo sabes por lo que has estudiado, no permiten resolver situaciones complejas con facilidad ni con incógnitas; por ello, en álgebra se estudian las operaciones con polinomios.

Operaciones con polinomios

Estás trabajando para saber utilizar operaciones algebraicas con polinomios para la solución de problemas de tu entorno.

Un polinomio es una expresión algebraica constituida por un número finito de términos algebraicos; como has visto, cada uno ellos está compuesto por números y letras relacionadas mediante productos y potencias con números naturales. Ejemplos:

$$5x^2 + 3x + 7$$

$$x^3 + 5ab^2 - 2n^3$$

$$7a^2b^5$$

Existen diversos tipos de polinomios: monomios, binomios, trinomios, etcétera.

Un monomio es un polinomio que consta de un solo término, por ejemplo: $5x^4 y$.

Un binomio es el que consta de dos términos, por ejemplo: $7a - 3b^3$

Un trinomio consta de tres términos, por ejemplo: $a^4 - 3x^2 + 8$

El resto de los polinomios se caracterizan por el número de términos que lo componen; así existen polinomios de cuatro términos, de cinco términos, etcétera. Con los polinomios se pueden realizar las mismas operaciones que con los números reales: suma, resta, multiplicación y división.

Suma de polinomios

Para sumar dos o más polinomios simplemente se unen con un signo + y se reducen los términos semejantes. También suelen colocarse uno debajo del otro, de modo que los términos semejantes queden en columna, para facilitar la reducción de estos. Ejemplos:

Si queremos sumar los polinomios $5x - 4y + 3$ y $7x + 2y - 9$

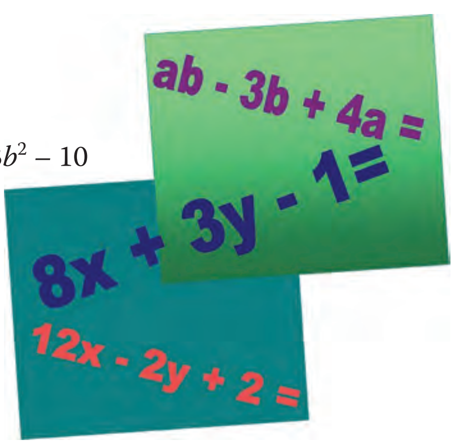
entonces $5x - 4y + 3 + 7x + 2y - 9 = 12x - 2y - 6$

Si queremos sumar los polinomios

$a^2b - 6b + 3a^2$, $4a^2 + 2b^2$ y $7a^2b - 3b - 5b^2 - 10$, entonces;

$a^2b - 6b + 3a^2 + 4a^2 + 2b^2 + 7a^2b - 3b - 5b^2 - 10 = 8a^2b - 9b + 7a^2 - 3b^2 - 10$

Si queremos realizar una suma en columna:



$$\begin{array}{r} 5x - 4y + 3 \\ +\quad 7x + 2y - 9 \\ \hline 12x - 2y - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr} & a^2b - 6b & + 3a^2 & & \\ + & & 4a^2 & + 2b^2 & \\ & 7a^2b - 3b & & - 5b^2 & - 10 \\ \hline & 8a^2b - 9b & + 7a^2 & - 3b^2 & - 10 \end{array}$$

¿? Asesoría

Recuerda que los dos términos de una resta se llaman minuendo y sustraendo. El primero es la cantidad de la cual se resta el segundo. Por ejemplo: 63 – 4 = 59, 63 es el minuendo, y 4 es el sustraendo.

Resta de polinomios

Para restar dos o más polinomios restamos del minuendo cada uno de los términos del sustraendo. Para hacerlo, primero debemos anotar el minuendo y, a continuación escribiremos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos; después reducimos términos semejantes. También pueden colocarse uno debajo del otro, para que los términos semejantes queden en columna, igual que en la suma, pues una vez cambiados los signos del sustraendo lo que se efectúa es una suma.

Ejemplos:

Si queremos restarle al polinomio $-8a + 6b + c$ el polinomio $5a + 2b - 4c$, entonces $-8a + 6b + c - 5a - 2b + 4c = -13a + 4b + 5c$

Si queremos restarle a $12xy^3 - 8x^2 + x^3y$ el polinomio $6x^2 - 2x^3y - 4y^2$ entonces $12xy^3 - 8x^2 + x^3y - 6x^2 + 2x^3y + 4y^2 = 12x^3y - 14x^2 + 3x^3y + 4y^2$

Si queremos restar un polinomio en columna:

$$\begin{array}{r} -8a + 6b + c \\ -\;\; 5a + 2b - 4c \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} -8a + 6b + c \\ +\;\; 5a - 2b + 4c \\ \hline 13a + 4b + 5c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12xy^3 - 8x^2 + x^3y \\ -\;\; 6x^2 - 2x^3y - 4y^2 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 12xy^3 - 8x^2 + x^3y \\ +\;\; - 6x^2 + 2x^3y + 4y^2 \\ \hline 12xy^3 - 14x^2 + 3x^3y + 4\,y^2 \end{array}$$

Actividad 6

A. Realiza las siguientes sumas de polinomios por el método que elijas.

a) $(7a^3 + a - 4) + (5a^2 - 6a - 8) =$ ______________________

b) $(5x + 3y - 4xy) + (9x^2 - 13x + 7xy) =$ ______________________

c) $(2m - 7) + (m^3 - 6m + 1) + (m^2 - 3m - 2) =$ ______________________

B. Efectúa las siguientes restas de polinomios.

a) $(2x^3 + 6x^2 - 4x) - (5x^3 - 6x^2 - x) =$ ______________________

b) $(a^2 - 3a - 4b) - (-9a^2 - 3a + 7b) =$ ______________________

c) $(12x^2 - 7x) - (x^2 - 9x + 5) =$ ______________________

____

Una vez que concluyas revisa tus respuestas en el Apéndice 1, para verificar tus avances.

FICHERO

Ahora prepara una ficha de resumen para sintetizar el procedimiento para sumar y restar polinomios.

En los siguientes días, identifica los problemas de tu vida cotidiana que involucran suma y resta de polinomios. Recuerda que si no hallas ejemplos de tu entorno, debes consultar otras fuentes para encontrarlos.

SESIÓN 8 ¿SE MULTIPLICA TODO DE LA MISMA FORMA?

Multiplicación de polinomios

En la multiplicación de polinomios podemos encontrar diversas situaciones que requieren manejarse de manera diferente:

a) Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos o más monomios se multiplican los coeficientes numéricos y las literales aplicando las reglas de los signos y las leyes de los exponentes.

Ejemplos: $5a^2b^5 \cdot 7ab^2 = 5 \cdot 7 \cdot a^{2+1} \cdot b^{5+2} = 35a^3b^7$

¡Atención!

También podemos utilizar los *paréntesis*, en lugar del símbolo · o del signo × para indicar la multiplicación, como se constata en los siguientes ejemplos:

$$(5a^2b^5)(7ab^2) = 5a^2b^5 \cdot 7ab^2 = 35a^3b^7$$

$$(-2x^3y)(9y^2z^2) = -18x^3y^3z^2$$

$$(-m^4n^2)(8n^2z^3)(-5mn^5z) = 40m^5n^9z^4$$

b) Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio aplicamos la *propiedad distributiva*. ¿La recuerdas? Es aquella que indica que el producto de un número por la suma de otros dos, es igual a la suma de los productos de cada uno de los sumandos por ese número, es decir, $a(b + c) = ab + ac$.

Ejemplo: $4x^3y(2x^2 - 7xy + x - 5)$

Para multiplicar el monomio $4x^3y$ por el polinomio $2x^2 - 7xy + x - 5$, aplico la propiedad distributiva y multiplico $4x^3y$ por cada uno de los términos del polinomio.

$$4x^3y(2x^2 - 7xy + x - 5) = (4x^3y)(2x^2) + (4x^3y)(-7xy) + (4x^3y)(x) + (4x^3y)(-5)$$

Por lo tanto: $4x^3y(2x^2 - 7xy + x - 5) = 8x^5y - 28x^4y^2 + 4x^4y - 20x^3y$

Gestión del aprendizaje

¿Tienes claras las leyes de los signos y las propiedades de los exponentes? Ambas fueron cubiertas en la Unidad 1. Al analizar la multiplicación de números reales, repasaste las leyes de los signos; aprendiste las propiedades de los exponentes cuando estudiaste las potencias. Consulta las ficha de resumen que elaboraste y verifica qué tanto las recuerdas. Para facilitar tu manejo del álgebra es necesario que después de haberlas entendido las hayas memorizado y puedas aplicarlas de manera automática.

Otros ejemplos:

$$-5a(7a^3 + a^2 - 4a) = -35a^4 - 5a^3 + 20a^2$$
$$-(5x - 2y) = -5x + 2y$$

¡Atención! En el ejemplo anterior el signo – significa que estamos multiplicando por –1.

*c) **Multiplicación de dos polinomios***

Para multiplicar dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por todos los términos del segundo y sumarlos o restarlos dependiendo de la operación que enlace los términos del primer polinomio.

Si estudias los siguientes ejemplos, podrás observar los pasos que debemos realizar:

$$(5x - 3y)\,(7a^2 + 4a - 2)$$
$$= 5x(7a^2 + 4a - 2) - 3y(7a^2 + 4a - 2)$$
$$= 35a^2x + 20ax - 10x - 21a^2y - 12ay + 6y$$

Nota cómo en el segundo paso hemos convertido la multiplicación de polinomios en una resta de dos multiplicaciones de monomio con polinomio, que ya podemos resolver con el procedimiento que estudiaste en el inciso anterior.

Estudia este otro ejemplo:

$$(x^3 + 3xy - 1)(5y^2 - 7y) = x^3(5y^2 - 7y) + 3xy(5y^2 - 7y) - 1(5y^2 - 7y)$$
$$= 5x^3y^2 - 7x^3y + 15\,xy^3 - 21xy^2 - 5y^2 + 7y$$

Observa cómo lo que hacemos es convertir la multiplicación de polinomios en una suma o resta de multiplicaciones de monomio con polinomio, operación que aprendimos a manejar en el inciso anterior. ¿Te das cuenta cómo para resolver expresiones algebraicas las vamos transformado para llevarlas a formas más simples que podemos solucionar?

SESIÓN 9 ¿Y ES IGUAL CON LAS DIVISIONES?

División de polinomios

La división de polinomios también se presenta en diversas formas:

*a) **División de un monomio entre un monomio***

Para dividir un monomio entre otro, se dividen los coeficientes numéricos y se aplican las leyes de los exponentes.

Ejemplos:

$$\frac{6x^5}{3x^2} = \left(\frac{6}{3}\right)x^{5-2} = 2x^3$$

$$\frac{-2a^5b}{5a^3b^4}=\frac{-2aaaaab}{5aaabbbb}=-\frac{2a^2}{5b^3}$$

$$\frac{-20m^2}{-4m^7n^3}=\frac{5}{m^5n^3}$$

$$\frac{9x}{45x^3y^2}=\frac{1}{5x^2y^2}$$

b) ***División de un polinomio entre un monomio***

Para dividir un polinomio entre un monomio se aplica la *propiedad distributiva* y se divide cada término entre el monomio. Ejemplos:

$$\frac{12a^4+16a^2-8a}{4a}=\left(\frac{1}{4a}\right)\left(12a^4+16a^2-8a\right)=\frac{12a^4}{4a}+\frac{16a^2}{4a}-\frac{8a}{4a}=3a^3+4a-2$$

$$\frac{2x^2y^2-15ax-9y^5}{3x^4y}=\frac{2x^2y^2}{3x^4y}-\frac{15ax}{3x^4y}-\frac{9y^5}{3x^4y}=\frac{2y}{3x^2}-\frac{5a}{x^3y}-\frac{3y^4}{x^4}$$

c) División de polinomios

$$\underset{\text{dividendo}}{\underset{\uparrow}{(3x^4+x^3-x^2-1)}}\div\underset{\text{divisor}}{\underset{\uparrow}{(x-2)}}$$

Para dividir dos polinomios se procede de manera similar a la división aritmética. ¿Recuerdas que revisamos el algoritmo en la Unidad 1? ¡Repásalo si no te acuerdas! Se ordenan los polinomios con respecto a una misma literal, de mayor a menor exponente, si el polinomio no es completo se dejan los espacios de los términos que faltan, y se coloca un 0 en ese lugar. Ejemplo:

Si queremos efectuar la siguiente división: $(3x^4+x^3-x^2-1)\div(x-2)$

En el dividendo falta el término x^1 = x. Debemos dejar ese espacio y poner un 0 en su lugar. Acomodamos al dividendo y al divisor como se muestra a continuación: $x-2\,\overline{\big)\,3x^4+x^3\;-x^2+0-1}$

El primer termino del cociente se obtiene dividiendo el primer término del dividendo entre el primer miembro del divisor, y se coloca arriba. Es decir, efectuando $\frac{3x^4}{x}=3x^3$, y el resultado se coloca arriba, encima del término semejante a éste del dividendo:

$$\begin{array}{r|l} & 3x^3 \\ \hline x-2 & 3x^4+x^3-x^2+0-1 \end{array}$$

Luego se multiplica ese primer término del cociente por todos los términos del divisor, se coloca este producto debajo del dividendo y se resta del dividendo (como lo hacemos en la división aritmética).

Gestión del aprendizaje

Hablar de "leyes de los exponentes" es otra manera de aludir a las propiedades de estos. Recuerda que elaboraste una ficha de resumen en la unidad anterior. ¡Tenla a la mano!

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 \\ \hline
x-2 & 3x^4 + x^3 - x^2 + 0 - 1 \\
 & \underline{-3x^4 + 6x^3} \\
 & \quad 0 + 7x^3
\end{array}$$

Observa que al producto de $3x^2(x-2) = 3x^4 - 6x^3$, se le cambia el signo antes de colocarlo debajo del dividendo, y luego se suma (como se hace en la resta de polinomios). Después se baja el siguiente término del dividendo al lado de lo que restó, en este caso, $-x^2$.

El segundo término del cociente se obtiene dividiendo el primer termino del resto (resultado del paso anterior), entre el primer término del divisor, es decir, efectuando $\dfrac{7x^3}{x} = 7x^2$, y el resultado se coloca arriba; una vez más, se multiplica este segundo término del cociente por todos los términos del divisor, se coloca este producto debajo del dividendo parcial y se resta de éste.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 + 7x^2 \\ \hline
x-2 & 3x^4 + x^3 - x^2 + 0 - 1 \\
 & \underline{-3x^4 + 6x^3} \\
 & \qquad 7x^3 - x^2 \\
 & \qquad \underline{-7x^3 + 14x^2} \\
 & \qquad\quad 0 + 13x^2
\end{array}$$

Se baja el 0, que es el término que sigue del dividendo, al lado del resto y se divide $\dfrac{13x^2}{x} = 13x$, y se coloca arriba como parte del cociente. Se multiplica por el divisor y se resta:

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 + 7x^2 + 13x \\ \hline
x-2 & 3x^4 + x^3 - x^2 + 0 - 1 \\
 & \underline{-3x^4 + 6x^3} \\
 & \qquad 7x^3 - x^2 \\
 & \qquad \underline{-7x^3 + 14x^2} \\
 & \qquad\qquad 13x^2 + 0 \\
 & \qquad\qquad \underline{-13x^2 + 26x} \\
 & \qquad\qquad\qquad 26x
\end{array}$$

Se continua así hasta que el resto sea cero o un dividendo parcial cuyo primer término no pueda ser dividido por el primer término del divisor. Cuando esto ocurre, el resto será el residuo de la división.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 + 7x^2 + 13x + 26 \\ \hline
x - 2 & 3x^4 + x^3 - x^2 + 0 - 1 \\
 & \underline{-3x^4 + 6x^3} \\
 & \quad 7x^3 - x^2 \\
 & \quad \underline{-7x^3 + 14x^2} \\
 & \qquad 13x^2 + 0 \\
 & \qquad \underline{-13x^2 + 26x} \\
 & \qquad\qquad 26x - 1 \\
 & \qquad\qquad \underline{-26x + 52} \\
 & \qquad\qquad\qquad 51
\end{array}
$$

$3x^3 + 7x^2 + 13x + 26$ es el cociente, o resultado; 51 es el residuo.

Actividad 7

Realiza las siguientes operaciones.

A. Multiplica los siguientes polinomios.

a) $(5x^2 - 3y)(4xy - 7y^3)$

b) $-7a^3b(9a^2 + 8a - 5)$

c) $8x^3y(-4ax^2y^2)$

d) $(2a^3b - 9a^2b^2 + 4ab - 6)(3a^2b + ab^2 - 14b)$

B. Divide los siguientes polinomios.

a) $(a^3 - 27) \div (a - 3)$

b) $\dfrac{-18x^4y^3}{27xy^5z}$

c) $(14m^4n - 6mn^2 + 8mn) \div (2mn)$

d) $(8x^3 - 9y^3 - 6x^2y + 5xy) \div (2x - 3y)$

Para saber más

Acerca de las operaciones con polinomios revisa las siguientes páginas: http://azul2.bnct.ipn.mx/algebra/polinomios.PDF http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas25.htm http://yachay.stormpages.com/07_4div/div3.htm

FICHERO

Prepara ahora una ficha de resumen sobre el procedimiento para realizar la multiplicación y la división de polinomios. Recuerda que ambas se presentan en varios casos: monomio (por o entre) monomio, polinomio (por o entre) monomio, y polinomio (por o entre) polinomio.

Puedes localizar mayor información sobre el tema en alguno de los libros enumerados en la bibliografía de este material o en una de las páginas electrónicas sugeridas en la cápsula PARA SABER MÁS anterior.

SESIÓN 10 ¿CALCULAMOS LO QUE NECESITAMOS?

Ahora tienes herramientas para manipular las expresiones que habías encontrado en el problema 1, de los recursos para la escuela de futbol. Recuerda que se busca la cantidad de dinero, x, que los colonos deben invertir para abrirla. Los datos que se tienen son los siguientes: Un tercio de ese dinero se invertirá en las canchas: $\frac{1}{3}x$, y dos tercios de lo que reste se invertirá en los vestidores: $\frac{2}{3}\ x-\frac{1}{3}x$. Además, deberán contar con $40,000.00 para la cafetería.

a) Usa los conocimientos acerca de las operaciones con polinomios para simplificar la última expresión. Realiza una multiplicación de polinomios que te permita eliminar el paréntesis que se encuentra en la expresión, y, de ese modo, obtener una expresión más sencilla.

b) ¿Qué otra cosa podemos hacer para reducir la expresión anterior?

c) Representa en una expresión lo que deben invertir para construir los vestidores.

Verifica tus resultados en el Apéndice 1, para poder continuar tu aprendizaje de manera segura.

Poco a poco estás aprendiendo cómo manejar el lenguaje algebraico. A partir de la reducción de términos semejantes y las operaciones con polinomios que has aprendido a realizar, podrás simplificar distintas ecuaciones algebraicas para resolver diferentes problemas. Recuerda que esto te permitirá modelar las relaciones entre las incógnitas que identificas en situaciones reales. Así que cada vez cuentas con más elementos para solucionar problemas que pueden ser, a su vez, más complejos.

Para terminar colorea en la siguiente tabla tu nivel de avance. Toma en cuenta que el máximo es 5 y el mínimo 1.

Utiliza operaciones algebraicas con polinomios para la solución de problemas					
Criterios de desempeño	Nivel de desempeño				
	1	2	3	4	5
Sé identificar los datos del problema					
Sé determinar cuál es el cuestionamiento del problema					
Sé traducir del lenguaje común al algebraico					
Sé simplificar el lenguaje para resolverlo					
Sé realizar operaciones con polinomios para llegar a la solución					

Sigue avanzando paso a paso. Retoma la situación de los colonos una vez más para solucionarla.

Ecuaciones lineales

SESIÓN 11 ¿CÚAL ES LA INVERSIÓN TOTAL DE LOS COLONOS PARA CONSTRUIR LA ESCUELA DE FUTBOL?

Estás trabajando para encontrar y proponer soluciones a situaciones de tu entorno donde aplicas ecuaciones lineales con coeficientes enteros o fraccionarios y las representas gráficamente.

Retoma el problema 1, hasta ahora sabes que los colonos deben invertir $\frac{1}{3}x$ en acondicionar las canchas; en construir los vestidores $\frac{2}{9}x$ y en la cafetería \$40,000.00. La suma de esos tres rubros deberá ser igual a la cantidad de dinero que requieren. Al convertirlo a lenguaje matemático lo expresamos así: $\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x + 40{,}000 = x$

La expresión alcanzada lleva un signo de igual, y como ya sabes, a este tipo de expresión se le llama **ecuación**. Ésta es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparecen valores desconocidos o incógnitas, como en las siguientes:

$$3x + 4 = 4x - 1$$
$$x^3y + 2xy + 4x - y = 5$$

Gestión del aprendizaje

¿Igualdades? ¿Te suena familiar el término? Recuerda que en la Unidad 1 estudiaste las propiedades de la igualdad. Busca tu ficha de resumen sobre este tema para que puedas aplicar lo que aprendiste en la solución de ecuaciones lineales.

Las ecuaciones pueden ser lineales y cuadráticas. Una **ecuación es lineal o de primer grado** cuando las incógnitas no están elevadas a ninguna potencia, es decir, que su exponente es 1, tal y como los siguientes ejemplos:

$$7x + 3 = 9x - 3$$
$$6x - 4y = 30$$

Las ecuaciones lineales pueden tener una o más incógnitas; a continuación aprenderás a resolver ambos tipos.

Una **ecuación lineal o de primer grado con una incógnita** es aquella que puede escribirse en la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son números reales, y $a \neq 0$

Ejemplos:

$$7x + 3 = 38$$
$$6(3x - 1) - 2x = 2(2x - 5) - 8$$

¡Atención! Aunque la ecuación del segundo ejemplo no está en la forma $ax + b = c$, se puede llegar a ella haciendo operaciones algebraicas y reduciendo términos semejantes.

La ecuación con la que se expresa la situación problemática de los colonos es de primer grado con una incógnita. La única incógnita es x, que en esta ecuación representa la cantidad de dinero que deben invertir.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita se resuelven despejando la incógnita, usando las propiedades de la igualdad. Por ejemplo:

$$5x + 4 = 6x - 3$$

Para solucionarla, se requiere reducir los términos semejantes, $5x$ con $6x$ y 4 con -3. Sin embargo, para poder reducir términos semejantes, estos deben encontrarse del mismo lado de la igualdad.

Esto quiere decir que los términos $5x$ y $6x$, 4 y -3, tendrían que encontrarse en el mismo lado de la ecuación para poderse sumar. Por lo tanto, necesitamos mover al 6x y al 4 para tener a los semejantes del mismo lado. Esto se logra mediante las **propiedades de la igualdad** que me permiten agregar términos a la ecuación, siempre y cuando los agregue de ambos lados para no alterar el valor de la misma. Piensa que una ecuación es como una balanza que queremos mantener equilibrada, lo que agreguemos de un lado, lo debemos agregar también del otro para que el equilibrio se mantenga.

Si sumo $-6x$ de ambos lados de la ecuación, $6x$ desaparecerá del lado derecho:

$$5x + 4 - 6x = 6x - 3 - 6x$$

Al eliminar el término 6x del lado derecho de la ecuación, queda:

$$5x + 4 - 6x = -3$$

Del mismo modo, si sumo -4 de ambos lados de la igualdad, entonces ésta queda: $5x + 4 - 6x - 4 = -3 - 4$, el 4 desaparecerá del lado izquierdo y quedará así: $5x - 6x = -3 - 4$, ahora reduzco los términos semejantes y la ecuación queda: $-1x = -7$ o, lo que es lo mismo, $-x = -7$.

Divido entre -1 ambos lados de la igualdad y queda el valor de x, $x = 7$, que es la solución de la ecuación.

Ya sabes cómo se resuelven las ecuaciones lineales. Pero, ¿cómo utilizarlas para solucionar problemas? ¡Comienza analizando el siguiente ejemplo!

Luis es 8 años mayor que Juan. Hace 16 años Luis tenía el triple de edad que Juan. ¿Cuál es la edad actual de cada uno de ellos?

Lo primero a tomar en cuenta es que las incógnitas son las edades de Luis y Juan. Hasta este momento has aprendido a resolver ecuaciones con una incógnita y aquí tenemos dos incógnitas. Sin embargo, podemos expresar una incógnita en términos de la otra.

Se sabe que Luis es 8 años mayor que Juan, por lo que las edades actuales de cada uno de ellos podrían expresarse de la siguiente manera:

Si la edad de Juan es: x, entonces la edad de Luis es: $x + 8$.

De este modo, aunque parecía que había dos incógnitas en la situación, en

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cuáles son las incógnitas del problema?
- ¿Cómo podemos traducir el problema al lenguaje algebraico?

realidad solo hay una: la x que representa la edad de Juan. Una vez que encuentres ésta, se suma 8 y se encuentra la edad de Luis.

Ahora, ¿qué edad tenían ambos hace 16 años? Para expresar estas edades debemos restar 16 a cada una de las edades actuales, ¿no es así?

La edad de Juan hace 16 años era: $x - 16$

La edad de Luis hace 16 años era: $x + 8 - 16$

Reduciendo los términos semejantes, de la segunda ecuación, ésta se expresa en su forma más simple: $x + 8 - 16 = x - 8$

Para resolver el problema se utiliza la relación entre la edad de Luis y la edad de Juan que se enuncia en el problema. "Hace 16 años la edad de Luis era igual al triple de la de Juan" lo que se traduce de la siguiente manera:

$$x - 8 = 3(x - 16)$$

Una vez que se tiene la ecuación se procede a despejarla para encontrar la incógnita. Habría que multiplicar el monomio con el polinomio que se encuentra del lado derecho de la ecuación:

$$x - 8 = 3x - 48$$

Recuerda que para pasar términos de un lado al otro se recurre a las propiedades de la igualdad, de la siguiente manera: sumo $-3x$ a ambos lados de la igualdad: $x - 8 - 3x = 3x - 48 - 3x$, y se elimina el del lado derecho, y queda $x - 8 - 3x = -48$,

reduciendo términos, queda $-2x - 8 = -48$,

sumando $+8$ a ambos lados: $-2x - 8 + 8 = -48 + 8$

reduciendo términos, queda $-2x = -40$,

dividiendo entre -2 ambos lados: $x = 20$

Sí, ya sabes el valor de x, lo cual significa que ya conoces la edad de Juan. *Juan tiene 20 años*. Y si Luis es 8 años mayor, es decir que tiene $x + 8 = 20 + 8$. *Luis tiene 28 años.*

¡Comprobemos nuestros resultados!

Verifiquemos que se cumplen los enunciados de la ecuación que son los siguientes:

Luis es ocho años mayor que Juan, se cumple pues Juan tiene 20 y Luis 28.

Hace 16 años Luis tenía el triple de edad que Juan, se cumple, pues hace 16 años Juan tenía $20 - 16 = 4$ años y Luis tenía $28 - 16 = 12$ años, y 12 es el triple de 4.

¿Te das cuenta cómo el lenguaje algebraico nos permite analizar relaciones complejas entre cantidades que conocemos y desconocemos?

Sigue reforzando tu conocimiento y aprendizaje, trabaja con un ejemplo más.

Si a un número le restas 28 unidades obtienes el mismo resultado que si lo divides entre 3. ¿Qué número es?

SESIÓN 12 ¿CON LAS PROPIEDADES DE LA IGUALDAD?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cuál es la incógnita del problema?
- ¿Cómo podemos traducirlo al lenguaje algebraico?
- ¿Cómo se resuelve?

Comienza por denominar a la incógnita a. Con ella representa al número al que si se le resta 28 da el mismo resultado que si se divide entre 3 y que en lenguaje algebraico se puede expresar de la siguiente forma: $a - 28 = \frac{a}{3}$

Aplica las propiedades de la igualdad, multiplicando por 3 a ambos lados de la igualdad y despejando el lado derecho, queda: $3(a - 28) = \frac{a}{3} \times 3 = a$

Realiza la multiplicación de un monomio y un polinomio del lado izquierdo de la igualdad: $3a - 84 = a$

Aplica de nuevo las propiedades de la igualdad, sumando 84 de ambos lados:

$3a - 84 + 84 = a + 84$, reduciendo queda: $3a = a + 84$, aplica las propiedades de la igualdad, sumando $-a$ de ambos lados de la igualdad: $3a - a = a - a + 84$, reduciendo términos semejantes queda: $2a = 84$, divide entre 2 a ambos lados y tendrás el valor de a: $\frac{2a}{2} = \frac{84}{2} = 42$, $a = 42$

Por lo tanto, *42 es el número que si le resto 28 da el mismo resultado que si lo divido entre 3.* ¡Compruébalo!

$$42 - 28 = 14 \qquad 42 \div 3 = 14$$

9 Resuelve los siguientes problemas mediante ecuaciones lineales.

A. Silvia es 15 años mayor que Rogelio y hace 5 años Silvia tenía el doble de edad que Rogelio. ¿Cuál es la edad de cada uno?

B. Encuentra el área de un rectángulo cuyo largo es igual al triple de su ancho y su perímetro es 72 metros.

C. Encuentra 3 números consecutivos tales que el doble del mayor sea igual al triple del menor disminuido en 5 unidades.

Verifica el resultado en el Apéndice 1. Ahora que ya sabes traducir el lenguaje común al lenguaje algebraico, y resolver problemas sencillos, podemos intentar algunos más complejos, como los que implica organizar la escuela de futbol.

PROBLEMA 2 Los colonos se están asesorando con otros conocidos suyos con experiencia en emprender negocios. Consultaron a Elena, una exitosa dueña de una tienda de productos de belleza quien les comentó sobre los rendimientos de su negocio.

Elena tenía una cierta cantidad de dinero ahorrada después de muchos años de trabajar. De sus ahorros, invirtió 100 mil pesos en abrir una tienda de productos de belleza. Al final del año, el negocio le redituó un tercio de lo que le había quedado. El siguiente año volvió a invertir 100 mil pesos. Sin embargo, después incrementó lo que le quedaba en un tercio de esta cantidad. El tercer año volvió a invertir 100 mil pesos, pero después volvió a ganar un tercio de lo que le quedaba. Al final, su capital se había duplicado con respecto de la cantidad original. Lo que no recuerda Elena, pues han transcurrido muchos años, es cuál era el capital inicial que invirtió en su negocio. Sin embargo, esta vez los colonos han adquirido los aprendizajes necesarios para responder a esta cuestión. ¿Cuál fue la inversión inicial de Elena?

Vayamos traduciendo paso por paso:

Elena tenía una cierta cantidad de dinero. Esa cantidad de dinero es nuestra incógnita x (para facilitar las operaciones, lo consideraremos en miles de pesos).

Tengo datos que me permiten averiguar el dinero que tenía Elena, pues el planteamiento me indica la relación entre lo que tenía y lo que tiene hoy, de dos maneras:

Por un lado, conozco las modificaciones que fue sufriendo su capital, a partir de lo que invirtió (que puedo restar) y de lo que ganó (que puedo sumar). También sé que duplicó su capital en ese periodo. Entonces puedo establecer una igualdad con base en estas dos relaciones.

Comencemos por traducir a lenguaje algebraico los cambios que fue sufriendo el capital de Elena considerando sus gastos e ingresos. En miles de pesos, el primer año se gastó 100. Resto 100 a x: $x - 100$.

Luego ganó un tercio de lo que le quedaba, es decir, que sumo un tercio de x–100 a x–100:

$$\underbrace{(x-100)}_{\text{lo que le quedaba}}+\underbrace{\frac{x-100}{3}}_{\text{un tercio de lo que le quedaba}}$$

Reduzcamos esta expresión algebraica a su mínima expresión: primero, multiplico por $\frac{3}{3}$ el primer término para tenerlo todo en tercios (común denominador) y poder sumar los numeradores.

¡Atención!

Recuerda que $\frac{3}{3} = 1$, por lo que el primer término, al multiplicarse por el neutro multiplicativo, sigue siendo el mismo.

$$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{3(x-100)}{3}+\frac{x-100}{3}$$

Sumo los numeradores y después reduzco términos semejantes:

$$3(x - 100) + x - 100 = 3x - 300 + x - 100$$
$$3x - 300 + x - 100 = 4x - 400$$

Por lo tanto:

$$\frac{3(x-100)}{3}+\frac{x-100}{3}=\frac{3(x-100)+x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$$

El siguiente año volvió a gastar 100. Resto 100 a lo que le quedaba:

$$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-400}{3}-\frac{3(100)}{3}=\frac{4x-400-300}{3}=\frac{4x-700}{3}$$

Después incrementó un tercio de lo que le quedaba. Sumo la tercera parte de lo que le quedaba a esa cantidad que le quedaba:

$$\frac{4x-700}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4x-700}{3}\right)=\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$$

Efectúo la suma de esas fracciones y reduzco términos semejantes:

$$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{4x-700}{3}\right)+\frac{4x-700}{9}=\frac{3(4x-700)}{9}+\frac{4x-700}{9}$$

$$=\frac{12x-2{,}100}{9}+\frac{4x-700}{9}=\frac{12x-2{,}100+4x-700}{9}=\frac{16x-2{,}800}{9}$$

El tercer año gastó de nuevo \$100.00. Resto 100 a lo que le quedaba:

$$\frac{16x-2{,}800}{9}-100=\frac{16x-2{,}800}{9}-\frac{9(100)}{9}=\frac{16x-2{,}800-900}{9}=\frac{16x-3{,}700}{9}$$

Después volvió a ganar un tercio de lo que le quedaba. Sumo la tercera parte de lo que le quedaba a esa misma cantidad:

$$\frac{16x-3{,}700}{9}+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{16x-3{,}700}{9}\right)=\frac{16x-3{,}700}{9}+\frac{16x-3{,}700}{27}$$

Efectúo la suma:

$$\frac{16x-3{,}700}{9}+\frac{16x-3{,}700}{27}=\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{16x-3{,}700}{9}\right)+\frac{16x-3{,}700}{27}$$

$$=\frac{3(16x-3{,}700)}{27}+\frac{16x-3{,}700}{27}=\frac{48x-11{,}100}{27}+\frac{16x-3{,}700}{27}$$

$$=\frac{48x-11{,}100+16x-3{,}700}{27}=\frac{64x-14{,}800}{27}$$

Entonces ya sé que el capital actual de Elena puede enunciarse como:

$$\frac{64x-14{,}800}{27}$$

También sabemos que su capital se duplicó con respecto de la cantidad original. Como el capital original era x, el doble será $2x$. Entonces, podemos llegar a una ecuación lineal.

$$\frac{64x-14{,}800}{27}=2x$$

Para encontrar el capital inicial de Elena debemos despejar a x de esta última ecuación: multiplicamos por 27 ambos lados de la ecuación:

$$27\left(\frac{64x-14{,}800}{27}\right)=27(2x)$$

Efectuamos las operaciones: $64x - 14800 = 54x$
Sumamos 14,800 a ambos lados:

$$64x - 14{,}800 + 14{,}800 = 54x + 14{,}800,\ 64x = 54x + 14{,}800$$

Ahora sumamos $-54x$ a ambos lados y reducimos términos semejantes:

$$64x - 54x = 54x + 14{,}800 - 54x,\ \ 10x = 14{,}800$$

Dividimos entre 10 a ambos lados de la ecuación:

$$\frac{10x}{10} = \frac{14{,}800}{10}$$
$$x = 1{,}480$$

¡Lo logramos! Recuerda que hablábamos de miles de pesos, por lo tanto, el capital inicial de Elena fue de $1,480,000.00.

SESIÓN 13 ¿SE HACE IGUAL CON EL APARADOR DE MARGARITA?

¡Actívate! Ya sabes cómo resolver problemas complejos con ecuaciones de primer grado.

Intenta resolver ahora el problema de Margarita, la vendedora de vestidos, que se planteó al inicio de la unidad.

Margarita abrió una tienda de vestidos y un diseñador de imagen le recomendó que para llamar la atención podría colocar en el aparador prendas de colores gris, verde y rosa. La sugerencia específica fue que la mitad fueran vestidos de color gris, más dos abrigos grises; de las prendas que quedaran, la mitad fueran vestidos de color verde más dos abrigos de color verde y que la mitad de las prendas sobrante fueran vestidos de color rosa más dos abrigos de color rosa. Además, debería colocar un vestido negro. ¿Cuántas prendas requeriere Margarita para el aparador?

Verifica el resultado en el Apéndice 1. Seguro que lo resolviste bien, pero en caso de que no, revisa en dónde puedes haber tenido algún error; verifica los signos, y la aplicación de las propiedades de las sumas, en fin, los pasos que seguiste. Una vez que encuentres el "detalle", realiza de nuevo el ejercicio. Si sigues con dificultades para resolverlo, pide ayuda en línea, o asiste a alguno de los Centros de Servicio de Preparatoria Abierta, con algún asesor.

Después de solucionar el tema de Margarita, ya estás preparado para resolver ecuaciones lineales de diversos tipos. Fácilmente podrás ayudar ahora a los colonos con el primer problema al que se enfrentaron al intentar abrir una escuela de futbol. Ya tenías algunos avances, pero recuerda para articular todo lo que has aprendido hasta el momento. El problema plantea lo siguiente:

Un asesor financiero les recomienda invertir la tercera parte de su dinero en adecuar las canchas y dos terceras partes de lo que les quede en construir los vestidores. Además deben tener $40,000.00 para una cafetería. ¿Cuánto dinero requieren para iniciar el negocio?

¡Intenta resolverlo!

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cuáles son las incógnitas del problema?
- ¿Cómo podemos traducirlo al lenguaje algebraico?
- ¿Cómo se resuelve?

Para empezar, denominemos como x a lo que representa la cantidad de dinero que deberán invertir en su negocio.

Entonces $\frac{1}{3}x$ representa la tercera parte de esta cantidad, y $x - \frac{1}{3}x$ representa lo que les quedará después de gastar una tercera parte del dinero.

Y en forma de ecuación, $\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x=\frac{4}{9}x$ representa lo que deberán gastar en construir los vestidores.

Lo que gastarán en acondicionar las canchas, más lo que gastarán en los vestidores, más 40,000 deberá ser igual al total del dinero, por lo tanto la ecuación es:
$\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}x+40{,}000=x$

Ahora, para reducir términos semejantes debemos pasar la x que se encuentra del lado derecho al lado izquierdo con el resto de los términos que tienen x, y al único término que no tiene x, del lado derecho. Entonces debemos sumar – x y – 40,000 de ambos lados.

$$\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}x+40{,}000-40{,}000-x=x-40{,}000-x,$$

efectuamos las operaciones y queda:

$$\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}x-x=-40{,}000$$

Ahora reducimos términos semejantes:

$$\frac{-2}{9}x=-40{,}000$$

Multiplicamos por 9 ambos lados:

$$-2x=-360{,}000$$

Dividimos entre –2 de ambos lados:

$$x=180{,}000$$

Muy bien, debes haber encontrado el valor de la incógnita x. Sí, $180,000 es la cantidad de dinero que se requiere para iniciar las adecuaciones del negocio.

Has aprendido a utilizar ecuaciones lineales para resolver problemas de la vida cotidiana. Recuerda que las ecuaciones son de gran ayuda para resolver diversas situaciones de tu vida diaria. ¡En adelante estarás preparado para enfrentarlas tú solo!

¿? Asesoría

Para resolver un problema, lo primero que necesito es identificar los datos que conozco y aquellos que desconozco. Éstos últimos son las incógnitas y en lenguaje algebraico se representan con literales. Puedes elegir cualquier letra. Por convención, suelen utilizarse con mayor frecuencia las últimas y las primeras letras del alfabeto: x, y, z o a, b, c, pero puedes usar cualquiera.

FICHERO

Una vez más redacta una ficha de resumen sobre las ecuaciones lineales o de primer grado y describe el proceso para resolverlas. No olvides localizar más información al respecto en fuentes impresas o digitales y complementar con ejemplos de situaciones cotidianas en las cuales apliques este tipo de ecuaciones.

SESIÓN 14 ¿Cómo empezar a promover la escuela de futbol?

PROBLEMA 4 Son varios los factores que habría que contemplar cuando se planea hacer un negocio. Entre ellos habría que tomar en cuenta una estrategia para promover los servicios que ofrece. Los colonos consideran que pueden esbozar el plan mientras terminan la construcción, y de este modo generar ingresos al momento de abrir la escuela.

Estudian los beneficios de ofrecer el 50% de descuento a quienes se inscriban con anticipación. Para ello habría que contratar a un grupo de vendedores que, en centros comerciales, afuera de las escuelas y en algunos parques cercanos, promovieran la escuela y los beneficios de la inscripción anticipada.

Pero, ¿qué se pudiese ofrecer a los vendedores que fuese atractivo y estuviese en las posibilidades de los colonos?

Una posibilidad es pagar a cada vendedor $500.00 a la semana más $60.00 por cada inscripción vendida. Pero, ¿cuántas inscripciones podría vender a la semana cada vendedor?, ¿cuáles serían las ganancias de cada vendedor? Una cosa se relaciona con la otra.

Por lo tanto, las incógnitas en este caso son dos: x, el número de inscripciones vendidas, y y, las ganancias semanales de cada vendedor.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cuál es la relación entre las ganancias de un vendedor y el número de inscripciones por él vendidas?
- ¿Cómo expresarías esta situación en lenguaje algebraico?

____

____

____

La ganancia de un vendedor es igual a 500 semanales más una comisión de 60 por cada inscripción vendida, y como x es el número de inscripciones vendidas, entonces la ecuación quedará así:

$$y = 500 + 60x$$

Una ecuación como la anterior, que tiene dos incógnitas, se denomina **ecuación lineal con dos incógnitas**; es de la forma $ax + by = c$ donde x y y son incógnitas, y a, b y c son números conocidos diferentes de cero. Ejemplos:

$$2x + y = 18$$
$$3x - 4y = 13$$

A la forma de las ecuaciones $ax + by = c$ se le conoce como **forma general**.

¡Atención! Una ecuación lineal de dos incógnitas puede no estar expresada de la forma general, sin embargo, se puede llevar a esa forma cambiando de lugar los términos correspondientes. La ecuación que representa las ganacias de los vendedores, no se encuentra en la forma general.

Veamos otro ejemplo. La ecuación $y = -3x + 5$ no está expresada de la forma general. Utilizando las propiedades de la igualdad, sumamos $3x$ de ambos lados y obtenemos:

$$3x + y = 5$$

Las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas son los pares de números x y y, que hacen que la igualdad sea cierta. Por ejemplo, para la ecuación anterior, $x = 1$ y $y = 2$, es una solución, pues si sustituimos esos valores en la ecuación, se cumplirá la igualdad:

$$3(1) + 2 = 5$$

Las soluciones de ecuaciones lineales con dos incógnitas no son únicas, de hecho existe un infinito de soluciones. Por ejemplo, $x = 4$ y $y = -7$, también es solución de la ecuación anterior. ¡Verifícalo! ¿Qué otra solución puedes encontrar tú?

SESIÓN 15 ¿LO PUEDO HACER CON PALITOS Y BOLITAS? O ALGO PARECIDO…

Gráficas de ecuaciones lineales de dos incógnitas

Estás trabajando para encontrar y proponer soluciones a situaciones de tu entorno donde aplicas ecuaciones lineales con coeficientes enteros o fraccionarios y las representas gráficamente.

Las gráficas de las ecuaciones lineales son líneas rectas en el plano cartesiano. Para trazar la recta que corresponde a una ecuación lineal debemos localizar al menos las coordenadas de algunos puntos que sean solución de la ecuación. Para ello, despejamos y y asignamos valores a x, sustituimos en la ecuación y obtenemos el valor de y que corresponde a esa x para que la pareja sea solución.

Por ejemplo, para la ecuación $2x - y = 5$ despejemos y sumando $-2x$ de ambos lados de la igualdad y nos queda: $-y = 5 - 2x$

Dividimos entre -1: $y = -5 + 2x$

Ahora damos valores a x, por ejemplo, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = -1$. Al sustituir $x = 0$ obtenemos: $y = -5 + 2(0) = -5 + 0 = -5$, que significa que la pareja de números $x = 0$, $y = -5$, es la solución de la ecuación.

Al sustituir $x = 1$ obtenemos:

$$y = -5 + 2(1)$$
$$y = -5 + 2$$
$$y = -3$$

La pareja de números $x = 1$, $y = -3$ es otra solución de la ecuación. Al sustituir $x = 2$ obtenemos:

$$y = -5 + 2(2)$$
$$y = -5 + 4$$
$$y = -1$$

La pareja de números $x = 2$, $y = -1$, también es solución de la ecuación.

Al sustituir $x = -1$ obtenemos:

$$y = -5 + 2(-1)$$
$$y = -5 - 2$$
$$y = -7$$

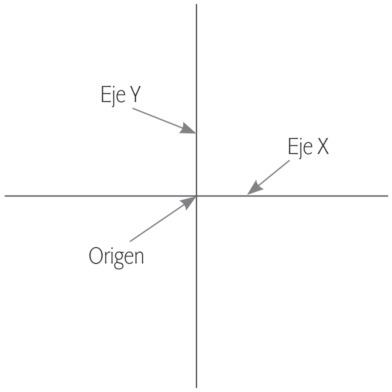
Y la pareja de números $x = -1$, $y = -7$, también es solución de la ecuación.

En el siguiente cuadro se muestran las parejas de números encontradas:

x	*y*
0	–5
1	–3
2	–1
–1	–7

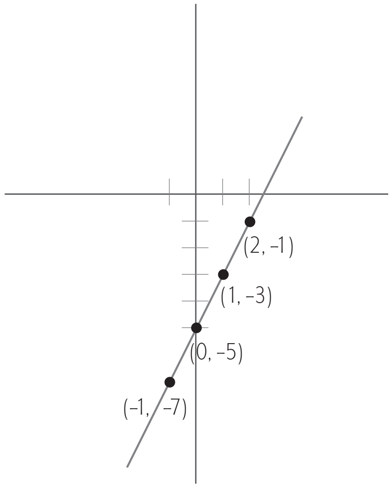
Para trazar la gráfica debemos localizar esos puntos en el plano cartesiano. Recuerda que el **plano cartesiano** está formado por dos rectas numéricas, una horizontal, o eje X, y otra vertical, o eje Y, que se cortan en un punto llamado **origen**, que representa al punto (0, 0).

Plano Cartesiano



En el plano cartesiano puedo localizar la posición de puntos, los cuales se representan por sus **coordenadas** o pares ordenados. Las coordenadas se forman asociando un valor del eje X y uno del eje Y, respectivamente, es decir, un punto con valores (x, y).

Entonces, la primera pareja de valores que obtuve representa al punto (0, –5) en el plano cartesiano. Por ser x = 0, no avanzo sobre el eje X, pero avanzo 5 unidades hacia abajo sobre el eje Y. La segunda pareja representa al punto (1, –3), por lo que avanzo una unidad a la derecha y 3 hacia abajo. Y así sucesivamente, localizo a todas las parejas de valores en el plano cartesiano.



La recta que une esos puntos es la que representa a la ecuación $2x - y = 5$

Pues sí, bastan dos puntos para trazar una recta, por lo que con encontrar dos soluciones (x, y), será suficiente para poder trazar la recta que representa a una ecuación en el plano cartesiano. Sin embargo, es conveniente obtener más de dos puntos (al menos tres) para corroborar que el resultado es correcto.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cuántos puntos bastarán para que puedas trazar una recta en el plano?

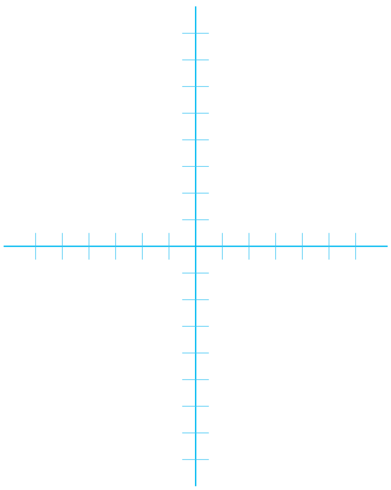
____

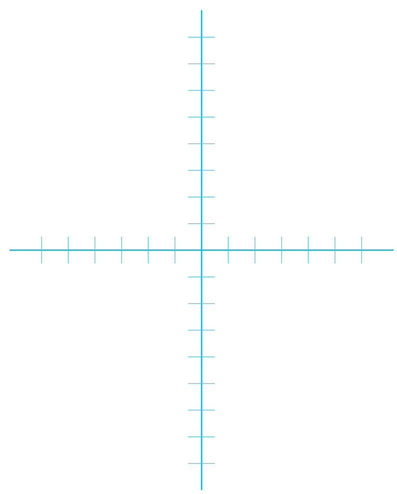
____

Traza en el plano cartesiano las rectas que representan a las siguientes ecuaciones lineales:

A. $3x - 2y = 5$

B. $x + 2y = 7$





Verifica tu respuesta en el Apéndice 1. Recuerda que siempre será mejor corroborar los avances, y que si tienes alguna dificultad con el aprendizaje bien vale la pena reforzar los conocimientos previos.

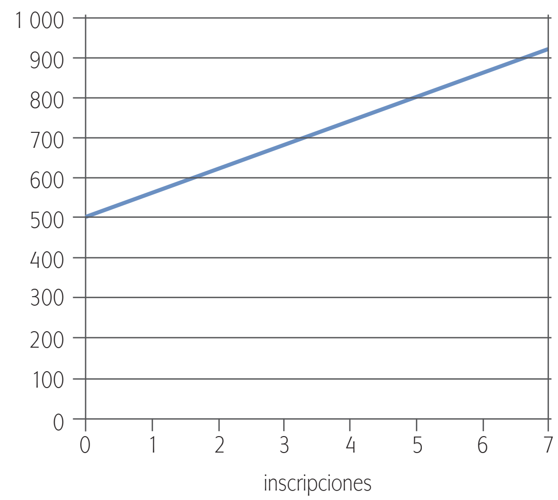
Para el problema 4, el de la estimación de las ganancias de los vendedores de inscripciones a la escuela de futbol tenemos la siguiente ecuación: $y = 500 + 60x$

Podemos hacer una tabla en la que, para diferentes valores de x, es decir, para cierta cantidad de inscripciones vendidas, obtengamos los valores correspondientes de y, es decir, la ganancia del vendedor.

inscripciones vendidas	ganancias del vendedor
0	500
1	560
2	620
3	680

inscripciones vendidas	ganancias del vendedor
4	740
5	800
6	860
7	920

Observa cómo los valores de y se incrementan conforme aumenta x. Esto tiene sentido pues mientras más inscripciones consiga un vendedor, mayores serán sus ganancias. Este comportamiento se puede verificar en la gráfica de la ecuación que se muestra a continuación:



Los colonos no pueden saber cuál será el pago que corresponderá a cada vendedor hasta no conocer el número de inscripciones que logre vender por semana. Sin embargo, a partir del análisis anterior, se pueden dar una idea de los gastos que implicará cada vendedor, en relación con los ingresos que aportará al negocio.

Si un vendedor no consigue colocar ninguna inscripción, solamente ganará \$500.00, si vende una inscripción, ganará \$560.00, si vende dos \$620.00, y así sucesivamente. ¿Cuánto ganará en una semana si vende 30 inscripciones?

Muy sencillo, ganará:

$$y = 500 + 60(30) = 500 + 1{,}800 = 2{,}300$$

Esta ecuación les servirá como modelo para analizar el comportamiento de las ganancias de un vendedor, en relación con la venta de inscripciones.

SESIÓN 16 ¿CÓMO ORGANIZAR LA PLANEACIÓN DE LOS GASTOS?

Sistemas de ecuaciones lineales

Después de que los colonos han terminado de organizar sus gastos en relación con las instalaciones de la escuela, y la promoción, deben continuar con la planeación de los gastos que siguen, y que son: la compra de equipo, accesorios, aparatos de gimnasio para entrenamiento, aditamentos para la cocina de la cafetería, acondicionamiento de las áreas verdes y un servicio médico básico.

PROBLEMA 5 Para organizar bien sus gastos, registran los costos de todos los artículos que necesitan comprar. A lo largo de esta segunda fase de planeación, se enfrentaron con la siguiente situación: Por la compra de balones y redes para la portería les habían dado un precio inicial de $3,500.00 Después, acordaron un descuento del 10% en los balones y un descuento del 8% en las redes, y así, pagarían $3,170.00. ¿Cuál es el precio de los balones y cuál el de las redes?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Puedes encontrar la solución a esta interrogante? ¿Qué tienes que hacer? Trata de recordar lo que has aprendido hasta el momento. Con base en lo que sabes, analiza la situación, y responde las siguientes preguntas:

- ¿Cómo puedes expresar este problema en una forma tal que te permita hacer operaciones y encontrar la solución?

Léelo con detenimiento e intenta escribir las expresiones algebraicas que describan el problema.

Observa que en este problema tenemos dos incógnitas, el precio de los balones, x, y el precio de las redes, y. Además, tenemos dos ecuaciones diferentes que involucran a esas dos incógnitas. Este tipo de problemas tienen una solución única para la pareja de números x, y. Para resolver este problema, debemos aprender a resolver los problemas que tienen dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ya sabes expresar situaciones haciendo uso del lenguaje algebraico. Por un lado, sabemos que el costo de los balones más el de las redes daba un costo total de $3,500.00. Habíamos llamado x al costo de los balones y y al de las redes. Tenemos la siguiente ecuación:

$$x + y = 3{,}500$$

Por otro lado, sabemos que si multiplicamos el precio de los balones por 0.9 (100% – 10% = 90% = 0.9) y también el precio de las redes por 0.92 (100% – 8% = 92% = 0.92) y sumamos esas cantidades, esa suma deberá ser igual a $3,170.00. Tenemos también la siguiente ecuación:

$$0.9x + 0.92y = 3{,}170$$

Por lo tanto, tenemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Las incógnitas son las mismas en ambas ecuaciones: x, el precio de los balones, y y, el precio de las redes. A un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas se le conoce como **sistema de ecuaciones**.

Existen muchas situaciones cotidianas en las que nos encontramos con dos ecuaciones con dos incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** son dos ecuaciones en las que las incógnitas deben tomar el mismo valor en ambas. Resolverlo consiste en determinar los valores de las dos incógnitas que cumplen simultáneamente las dos igualdades.

Por ejemplo:

$$x + y = 10$$
$$x - y = 2$$

Si analizamos cada una de las ecuaciones que componen el sistema, por separado, encontraríamos infinitas soluciones, como ya se mencionó en el tema anterior. Si analizamos nada más la primera ecuación, encontraremos una enorme cantidad de parejas de números que suman 10. Por ejemplo, $x = 8$ y $y = 2$, o $x = -5$ y $y = 15$, $x = 74$ y $y = -64$, etcétera.

Si, por otro lado, analizamos la segunda ecuación, encontraremos también una enorme cantidad de pares de números cuya resta sea 2. Por ejemplo, $x = 9$ y $y = 7$, o $x = -6$ y $y = -8$, $x = 67$ y $y = 65$, etcétera.

Sin embargo, al considerar juntas ambas ecuaciones para formar el sistema, solamente puede existir un par de números x y y que cumplan las dos a la vez. A ese par de números se les llama **solución del sistema de ecuaciones**.

Para el ejemplo anterior, la solución es $x = 6$ y $y = 4$, pues es la única pareja de valores que satisface ambas ecuaciones a la vez. Es decir:

$$6 + 4 = 10$$
$$6 - 4 = 2$$

¿Cómo puedes encontrar ese par de números? Existen varios métodos para hacerlo y aquí mencionaremos algunos de ellos. Para comprenderlos a partir de un ejemplo, analicemos el siguiente:

La señora González paga en el mercado, $159.00 por 6 kilogramos de naranjas y 3 kilogramos de manzanas. Vuelve al día siguiente y compra, al mismo precio, 2 kilogramos de naranja y 8 kilogramos de manzana, gastando un total de $228.00. ¿Cuál es el precio del kilo de naranja y del de manzana?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cuáles son las incógnitas del problema?
- ¿Cómo podemos traducirlo al lenguaje algebraico?
- ¿Cómo se resuelve?

Como podrás notar, en este problema tenemos dos incógnitas. Hay una incógnita que representa el precio por kilogramo de naranja: n y otra que representa el precio por kilogramo de manzana: m

La compra del primer día de la señora González la podemos traducir al lenguaje algebraico de la siguiente manera:

$$6n + 3m = 159$$

La compra del segundo día, se puede escribir como otra ecuación.

$$2n + 8m = 228$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6n + 3m &= 159 \\ 2n + 8m &= 228 \end{aligned}$$

En donde n representa el precio por kilogramo de naranja y m representa el precio por kilogramo de manzana.

SESIÓN 17 ¿SE SUSTITUYE LO DESCONOCIDO…?

Método de sustitución

Para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**, se siguen los siguientes pasos:

1. ***Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones***. Podemos despejar tanto a n como a m, de la primera o de la segunda ecuación. Si despejamos a m de la primera ecuación, sumando $-6n$ y dividiendo entre 3 de ambos lados de la ecuación, obtenemos: $m = \frac{159-6n}{3}$
2. ***Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación***, obteniendo una ecuación con una sola incógnita, es decir, que en la segunda ecuación, en donde antes decía m, ahora escribo $\frac{159-6n}{3}$, quedando: $2n+8\left(\frac{159-6n}{3}\right)=228$

   ¡Atención! Esta nueva ecuación solamente tiene una incógnita, n, y tú ya sabes despejar este tipo de ecuaciones.
3. ***Se resuelve la ecuación***. Resolvemos el lado izquierdo de la ecuación:

$$\left(\frac{3}{3}\right)2n+8\left(\frac{159-6n}{3}\right)=228$$

$$\frac{6n+8(159-6n)}{3}=228$$

$$\frac{6n+1272-48n}{3}=228$$

$$\frac{1272-42n}{3}=228$$

Multiplicamos por 3 a ambos lados de la ecuación:

$$1272 - 42n = 684$$

Sumamos –1272 de ambos lados de la ecuación:

$$1272 - 1272 - 42n = 684 - 1272$$
$$-42n = -588$$

Dividimos entre –42 a ambos lados de la ecuación:

$$n=\frac{-588}{-42}$$
$$n=14$$

4. ***El valor obtenido de n se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada***. Es decir en: $m=\frac{159-6n}{3}$

$$m=\frac{159-6(14)}{3}=\frac{159-84}{3}=\frac{75}{3}=25$$

5. Los dos valores obtenidos, $n = 14$, $m = 25$, constituyen la solución del sistema. ¡Hemos encontrado los precios que buscábamos! La naranja costó \$14.00 por kilogramo y la manzana costó \$25.00 por kilo.

Método de igualación

Para resolver un sistema por el **método de igualación** se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan sus valores.

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$3x - 4y = -6$$
$$2x + 4y = 16$$

1. ***Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones***. Podemos despejar a x o a y, siempre y cuando sea a la misma en ambas ecuaciones. Despejemos a x de la primera ecuación: $x=\frac{-6+4y}{3}$

   Ahora despejemos x de la segunda ecuación:

$$x=\frac{16-4y}{2}$$

2. ***Se igualan las dos expresiones***, para obtener una ecuación con una incógnita (si ambas son iguales a x, entonces son iguales entre sí).

$$\frac{-6+4y}{3}=\frac{16-4y}{2}$$

¡Atención! Esta nueva ecuación solamente tiene una incógnita, y, ¡ya puedes resolverla!

3. ***Se resuelve la ecuación***. Multiplicamos por 3 y por 2 a ambos lados de la ecuación:

$$2(-6+4y)=3(16-4y)$$
$$-12+8y=48-12y$$

Sumamos $12y$ y 12 de ambos lados de la ecuación:

$$-12+8y+12y+12=48-12y+12y+12$$

Reducimos términos semejantes:

$$20y=60$$

Dividimos entre 20 a ambos lados de la ecuación:

$$y=3$$

4. ***El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita***. Podemos sustituir el valor encontrado de y tanto en $x=\frac{-6+4y}{3}$ como en $x=\frac{16-4y}{2}$

Sustituyamos en la primera de éstas:

$$x=\frac{-6+4(3)}{3}=\frac{-6+12}{3}=\frac{6}{3}=2$$

¡Y tenemos ya el valor de ambas incógnitas!

SESIÓN 18 ¿Y SOLO CON NUMERITOS O TAMBIÉN CON DIBUJOS?

Método gráfico

El **método gráfico** consiste en trazar las rectas que representan gráficamente a las dos ecuaciones lineales. De esta manera, las coordenadas del punto de intersección (x, y) de dichas rectas, es la solución del sistema. Por ejemplo, usemos este método para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x+y=5$$
$$2x-y=1$$

Estás trabajando para emplear sistemas de ecuaciones linales en la resolución de situaciones problemáticas.

Recuerda que para trazar la gráfica de la primera ecuación debemos despejar a y y sustituir valores para x:

$$y = 5 - x$$

Para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, los valores correspondientes de y se muestran a continuación:

x	y
0	5
1	4
2	3

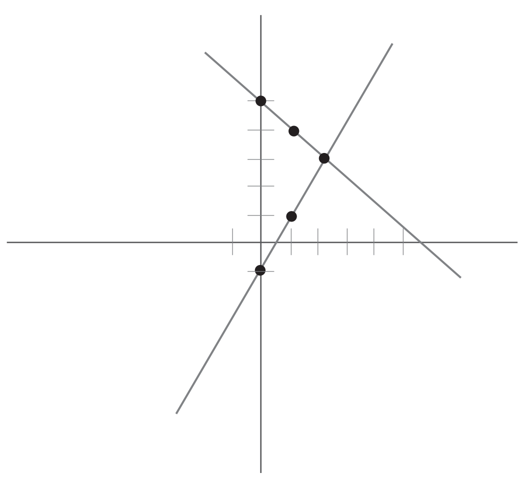
Despejamos y en la segunda ecuación:

$$y = -1 + 2x$$

Para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, los valores correspondientes de y son los siguientes:

x	y
0	-1
1	1
2	3

Representamos gráficamente ambas ecuaciones en el mismo plano cartesiano como se muestra a continuación:



Para saber más

Sobre ecuaciones lineales, consulta los siguientes sitios: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Resolucion_geometrica_ecuaciones/ecuacion.htm http://www.conevyt.org.mx/cursos/enciclope/algebra.html

Las rectas se cruzan en el punto (2, 3). Este punto es la solución del sistema de ecuaciones: $x = 2$, $y = 3$.

SESIÓN 19 RESOLVAMOS ALGUNOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Actividad 12

A. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$6x - 5y = 28$$
$$4x + 9y = -6$$

B. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación.

$$5x + y = -2$$
$$2x + 4y = 10$$

C. Resuelve el siguiente sistema por el método gráfico.

$$3x - y = 5$$
$$x + 2y = 4$$

D. Resuelve los siguientes problemas por cualquiera de los métodos anteriores.

a) En la tienda de abarrotes, 4 kilos de café y 2 de azúcar cuestan $216,00 mientras que 3 kilos de café y 7 de azúcar cuestan $228.00. ¿Cuál es el precio por kilo de cada producto?

b) La escuela de futbol gasta $12,000.00 en la compra de sillas y escritorios que hacen falta. Si el precio unitario de las sillas es de $900.00 y el de los escritorios $1,400.00, ¿cuántas sillas y escritorios se compraron si entre ambos sumaron 10?

Revisa el Apéndice 1 para corroborar si tus respuestas son correctas. Aprovecha siempre para sacar buenas experiencias de tus resultados; si fueron buenos, de lo que estamos seguros, refuerza tu estima y capacidad; si acaso no fueron tan buenos, aprovecha y repite los ejercicios, o busca algunos adicionales, para mejorar tus conocimientos y competencias.

Existen otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones además de los que has estudiado aquí. ¡Actívate! Investiga en Internet o en algún libro. Prepara una ficha de resumen donde expliques con tus propias palabras en qué consiste cada método, cuáles son los pasos que se deben seguir para encontrar la solución y registra un ejemplo.

SESIÓN 20 ¿Y LOS BALONES CUÁNTO COSTARON?

Con los conocimientos que adquiriste acerca de los sistemas de ecuaciones, estás preparado para ayudar a los colonos con el problema 5, el costo de las redes y los balones.

Léelo de nuevo y retoma las ecuaciones que habíamos encontrado para responder las siguientes preguntas.

Antes de seguir, ¡intenta resolverlo!

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cuáles son las incógnitas del problema?
- ¿Cómo se traduce al lenguaje algebraico?
- ¿Cómo se resuelve?

Recuerda que nuestras incógnitas son x y y, el costo de los balones y el de las redes, por un lado sabemos que el costo de los balones más el de las redes daba un total de $3,500.00. Teníamos la siguiente ecuación: $x + y = 3{,}500$.

Por otro lado, sabemos que si multiplicamos el precio de los balones por 0.9 y el precio de las redes por 0.92 y sumamos esas cantidades, esa suma deberá ser igual a $3,170.00. Teníamos la siguiente ecuación: $0.9x + 0.92y = 3{,}170$

Por lo tanto, el problema queda expresado a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = 3{,}500$$
$$0.9x + 0.92y = 3{,}170$$

Podemos resolverlo por cualquiera de los métodos de resolución que aprendimos.

Por el método de sustitución: despejamos y de la primera ecuación, sumando $-x$ en ambos lados de la ecuación: $y = 3{,}500 - x$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$0.9x + 0.92(3{,}500 - x) = 3{,}170$$

Efectuamos la multiplicación del segundo término:

$$0.9x + 3{,}220 - 0.92x = 3{,}170$$

Más información en...

Relacionada con los sistemas de ecuaciones lineales, consulta las siguientes páginas: http://www.math.com.mx/docs/sec/sec_0014_Sistemas_Lineales.pdf http://www.vadenumeros.es/tercero/sistemas-de-ecuaciones.htm http://carmesimatematic.webcindario.com/sistemas.htm

FICHERO

Ahora elabora tus fichas de resumen sobre la descripción de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales; incluye los que te presentamos en el libro, así como aquellos que hayas investigado en Internet.

Es un buen momento para organizar todas tus fichas. Vuelve a leerlas y analiza si tienes claros los conceptos y procedimientos involucrados; si no, vuelve a consultar la sección correspondiente del libro hasta aclarar tus dudas. Marca los temas con mayor dificultad para ti para que puedas repasarlos antes de presentar tu examen.

¿Has avanzado en tu bitácora? Ve analizando la forma en que se aplican los conceptos y procedimientos que estudias conforme avanzas. ¡No dejes para el final esta tarea, porque te costará más trabajo!

Sumamos –3,220 a ambos lados y reducimos términos semejantes:

$$0.9x + 3{,}220 - 0.92x - 3{,}220 = 3{,}170 - 3{,}220$$
$$0.9x - 0.92x = -50$$
$$-0.02x = -50$$

Dividimos entre –0.02 de ambos lados de la ecuación:

$$\frac{-0.02x}{-0.02} = \frac{-50}{-0.02} = 2{,}500$$
$$x = 2{,}500$$
$$y = 3{,}500 - 2{,}500 = 1{,}000$$

El costo original de los balones era de $2,500.00, y el de las redes de $1,000.00. Si aplicamos los descuentos correspondientes, tenemos:

$$2{,}500 \cdot 0.9 = 2{,}250$$
$$1{,}000 \cdot 0.92 = 920$$

El costo con descuento de los balones fue de $2,250, y el de las redes de $920.00

Y si sumamos ambas cantidades, 2,250 + 920 = 3,170, nos permite comprobar que se cumple la segunda ecuación.

¡Vas por buen camino! Utilizando las ecuaciones lineales de una y dos incógnitas, con los sistemas de ecuaciones podrás resolver una gran cantidad de problemas de la vida real que involucran cantidades desconocidas.

Para terminar colorea en la siguiente lista de cotejo tu nivel de avance. Toma en cuenta que el máximo es 5 y el mínimo 1.

Utilizar operaciones algebraicas con polinomios para la solución de problemas					
Criterios de desempeño	Nivel de desempeño				
	1	2	3	4	5
Sé identificar los datos del problema.					
Sé determinar cuál es el cuestionamiento del problema.					
Sé traducir del lenguaje común al algebraico.					
Sé simplificar el lenguaje para resolverlo.					
Sé realizar operaciones con polinomios para llegar a la solución.					
Sé resolver ecuaciones lineales.					
Sé graficar ecuaciones lineales.					
Sé resolver sistemas de ecuaciones lineales.					

Te sugerimos que si para alguno de los indicadores de desempeño tu respuesta equivale a 3 o menos, repases el tema para lograr un cabal entendimiento del mismo y avanzar con mayor facilidad en los temas restantes.

SESIÓN 21 ¿CÓMO SE CALCULAN LOS ÚLTIMOS DETALLES?

Ecuaciones cuadráticas

PROBLEMA 6 En la última etapa de planeación para su negocio, los colonos calcularán el presupuesto para los últimos detalles de la escuela deportiva: los acabados de las instalaciones, los accesorios de los baños para los vestidores y de los pisos, las plantas para los jardines y las puertas y ventanas.

Buscan asesoría de un arquitecto y éste les sugiere que la cafetería debe tener un área rectangular de 35 m^2 por lo menos. Por otro lado, han comprado material en descuento para construir las paredes y cuentan con suficiente para construir una longitud de 24 metros. Si la idea es gastar lo menos posible y aprovechar el material, ¿cuáles deben ser las medidas de los lados de la cafetería para que ésta mida 35 m^2 de área y 24 m de perímetro?

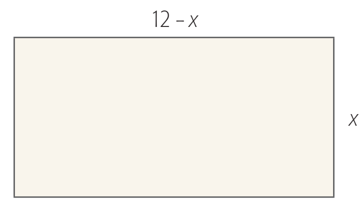
UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cómo podemos resolver este problema?
- ¿Cómo podemos escribirlo en lenguaje algebraico?

Intenta plantearlo, traducirlo al lenguaje algebraico y resolverlo.

Sean x y y los lados del rectángulo. Si los sumo me dará 12, puesto que el perímetro es 24, que es la suma de los cuatro lados, entonces, al sumar dos lados contíguos de un rectángulo se obtiene la mitad del perímetro.

$$x + y = 12$$
$$y = 12 - x$$



Además sabemos que el área debe ser igual a 35. Recuerda que debemos usar toda la información de la que disponemos, pues es la que nos ayudará a encontrar la incógnita. Entonces, para obtener el área debemos multiplicar los dos lados.

$$(x)(12 - x) = 35$$

Multiplicamos el monomio por el polinomio del lado izquierdo.

$$12x - x^2 = 35$$

Ésta es la ecuación que contiene toda la información del problema, pues el valor de x es el que nos proporcionará el tamaño de los lados del rectángulo.

Sin embargo, no puedo continuar reduciendo la ecuación pues el término x y el término x^2 no son semejantes.

Además, la ecuación tiene un término al cuadrado, que no tenían las que hemos estudiado anteriormente, y como ya vimos, este término no es semejante con el término que tiene la x, por lo que la ecuación no se puede reducir más, y en consecuencia, no podemos despejar a la x. Entonces, ¿cómo se resuelven estas ecuaciones?

En muchas ocasiones nos encontramos con situaciones en las cuales la relación entre las cantidades no es lineal y, por lo tanto, no podemos utilizar ecuaciones lineales para modelarlas.

A este tipo de ecuaciones se les conoce como ecuaciones cuadráticas.

Una **ecuación cuadrática o de segundo grado** es una expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde x es la incógnita, a, b y c son números reales cualesquiera, con $a \neq 0$. Ésta se conoce como la **forma general de la ecuación cuadrática**.

¡Atención!

Una ecuación que no está expresada en la forma general, se puede llevar a esta forma mediante operaciones algebraicas y reducción de términos.

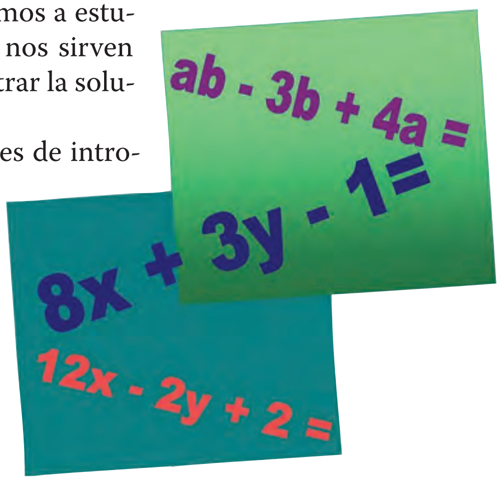
La ecuación que expresa el problema de los lados de la cafetería puede expresarse en la forma general. Sumamos x^2 y $-12x$ de ambos lados de la ecuación.

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Existen varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas y vamos a estudiar algunos. Es importante que conozcas algunos métodos que nos sirven para simplificar las ecuaciones cuadráticas y, de este modo, encontrar la solución que buscas.

Uno de estos se conoce como **método de factorización**. Antes de introducirte en este método, hagamos un paréntesis para aprender la factorización de diferentes expresiones algebraicas, para luego, aplicar el método para dar solución a las ecuaciones cuadráticas



Factorización

En la unidad anterior aprendiste a descomponer en factores primos un número. ¿Tienes claro cómo hacerlo? Por ejemplo, el 12 se puede descomponer en factores primos de la siguiente manera:

$$12 = (2)(2)(3)$$

Si multiplicas esos tres factores obtendrás como resultado 12.

Bueno, pues con las expresiones algebraicas se puede hacer algo equivalente y a esto lo llamamos factorización.

Factorizar una expresión algebraica es escribirla como el producto de sus factores. Por ejemplo, la expresión $a^2 - 36$, se puede escribir como el producto de dos factores:

$$(a + 6)(a - 6)$$

Para verificarlo, puedes efectuar la multiplicación de esos factores y verás que, después de reducir términos semejantes, se obtiene la expresión original.

$$(a + 6)(a - 6) = a^2 - 6a + 6a - 36 = a^2 - 36$$

¡Lo ves!

De modo que factorizar es realizar el proceso opuesto a multiplicar. Partimos de una expresión que puede ser el resultado de un producto y nos interesa saber qué factores dan ese resultado al multiplicarse.

Multiplicar: $(2)(3) = 6$
Factorizar: $6 = (2)(3)$
Multiplicar: $2x(a + b) = 2ax + 2bx$
Factorizar: $2ax + 2bx = 2x(a + b)$

Pero te preguntarás, ¿cómo podemos, a partir de determinada expresión, encontrar los factores de los que ésta es producto? Existen diversas formas en que se puede factorizar una expresión y que revisaremos a continuación.

SESIÓN 22 HAY FACTORES Y FACTORES…

Factorización por factor común

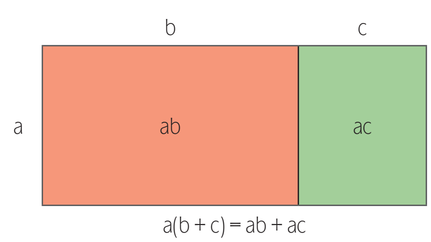
Gestión del aprendizaje

Recuerda que el factor común es aquel que divide a todos los términos sin dejar residuo. Para factorizar utilizarás muchos de los conceptos y procedimientos que aprendiste en la Unidad 1. ¡Ten tus fichas a la mano! En este momento te será útil consultar la ficha de las propiedades de la suma y la multiplicación así como la del máximo común divisor.

Esta factorización se puede aplicar cuando cada uno de los términos de un polinomio tienen un factor común. Ese factor común será el máximo común divisor de todos los términos

Ejemplos: $ab + ac$:

La expresión tiene dos términos, ab y ac, que tienen un factor común entre ellos, a, y ese factor multiplica a ambos términos. Divido ambos términos entre ese factor y lo coloco multiplicando a la suma de los términos que quedan de esa división: $ab + ac = a(b + c)$.



Si lo piensas con detenimiento, al factorizar aplicamos la *propiedad distributiva* en sentido inverso a como lo hacemos cuando multiplicamos.

Analicemos un ejemplo más complejo:

$$9x^2y^3 + 15x^3y^2 - 12xy^5$$

¿Cuál es el máximo común divisor de los tres términos de la expresión anterior? Los tres términos tienen muchos divisores comunes. Los tres son divisibles entre x, entre 3, entre y, pero buscamos al divisor *más grande*. ¿Cómo podemos hallarlo?

Primero analizamos a los coeficientes numéricos y buscamos el máximo común divisor de estos. El MCD (9, 15, 12) = 3

Luego analizamos las partes literales. Al igual que con los números, hay que buscar el exponente máximo común a todos los factores para cada letra. En el caso de la x, el exponente máximo común es 1, es decir, que todos los términos tienen al menos una x. En el caso de la y, el exponente máximo común es 2, es decir, que todos los términos tienen al menos dos y, o y^2.

Por lo tanto, el factor común, o máximo común divisor es $3xy^2$. Para factorizar, el factor común se escribe afuera, pues multiplica a cada uno de los términos; dentro del paréntesis escribo tres términos que son los que resultan de dividir a cada uno de los términos originales entre el factor común.

$$9x^2y^3+15x^3y^2-12xy^5=3xy^2\ \frac{9x^2y^3}{3xy^2}+\frac{15x^3y^2}{3xy^2}-\frac{12xy^5}{3xy^2}$$

$$=3xy^2\left(3xy+5x^2-4y^3\right)$$

Analiza otros ejemplos con detenimiento, hasta que te sea claro cómo hacerlo.

$$24a^3b^2-8ab=8ab\left(3a^2b-1\right)$$

$$36x^3-48x^2+30x=6x\left(6x^2-8x+5\right)$$

$$a\left(m+n\right)+b\left(m+n\right)=\left(m+n\right)\left(a+b\right)$$

Observa cómo dentro del paréntesis se mantiene la misma operación entre los términos: si era una suma o una resta, se siguen sumando o restando.

Gestión del aprendizaje

Para factorizar polinomios es importante que puedas dividir rápidamente términos algebraicos de distintas potencias. De acuerdo con las propiedades de los exponentes que estudiaste en la Unidad 1, la división entre números elevados a una potencia se realiza restando los exponentes.

Actividad 13

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas por factor común. Verifica tus resultados en el Apéndice 1.

A. $ax - bx =$

B. $9ax + 81b + 18c =$

C. $45m^3n - 35m^2 - 15m^4n^2 =$

D. $54x^4 + 36x^3 - 72x^2 =$

E. $5x^3y^2 - 3x^2y^4 + 7xy^3z =$

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Qué pasa cuando multiplico dos binomios conjugados? Multiplica los binomios conjugados anteriores y reduce términos semejantes. ¿Cuál es el resultado del producto?

SESIÓN 23 ¿Y SI HAY OTROS FACTORES…?

Factorización de diferencias de cuadrados

Dos **binomios conjugados** son aquellos que solamente se diferencian entre sí por un signo de la operación. Por ejemplo, $(a + b)$, $(a - b)$, son binomios conjugados; $(5x^3 - 3y^2)$ $(5x^3 + 3y^2)$, también son binomios conjugados.

Como habrás notado, al multiplicar binomios conjugados sucede lo siguiente:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

Al reducir términos semejantes, los dos términos de en medio se eliminan y obtendremos:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Esto sucede también con otros ejemplos de binomios conjugados.

$$(5x^3 - 3y^2)(5x^3 + 3y^2) =$$
$$25x^6 + 15x^3y^2 - 15x^3y^2 - 9y^4 =$$
$$25x^6 - 9y^4$$

Por lo tanto, cuando tengamos dos binomios conjugados, no hace falta que efectuemos todos los pasos de la multiplicación: simplemente escribimos los términos de los extremos, que son los cuadrados de los términos de los binomios, separados por un signo de –.

Ejemplo:

$$(4m + 5n)(4m - 5n) = 16m^2 - 25n^2$$
$$(x + z)(x - z) = x^2 - z^2$$

A este tipo de multiplicaciones en las que el resultado que se obtiene sigue ciertas reglas fijas, se les llama **productos notables**, pues una vez que los entendemos y nos los aprendemos no tenemos que realizar todos los pasos del producto, sino simplemente poner el resultado que es conocido.

Al resultado del producto de binomios conjugados se le llama **diferencia de cuadrados**.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Diferencia de cuadrados

Entonces, cuando queremos factorizar una diferencia de cuadrados, el resultado será el producto de dos binomios conjugados. ¿Cuáles? Aquellos que son las raíces cuadradas de los términos de la expresión a factorizar. Es decir, es la operación anterior, pero al revés.

Ejemplos: Si queremos factorizar la siguiente expresión algebraica:

$$36m^4 - 25p^2$$

Requerimos encontrar los números cuyos cuadrados son los dos términos de la expresión anterior, o en otras palabras, sacar su raíz cuadrada.

$36m^4 = (6m^2)^2$, ¿no es así?

$25p^2 = (5p)^2$, ¿no es cierto?

Entonces la factorización quedará de la siguiente manera:

$$36m^4 - 25p^2 = (6m^2 + 5p)(6m^2 - 5p)$$

Estudia estos ejemplos; observa cómo si identificamos que un polinomio es una diferencia de cuadrados, la factorización resulta muy sencilla:

$$9 - y^2 = (3 + y)(3 - y)$$
$$16x^6 - 49 = (4x^3 + 7)(4x^3 - 7)$$
$$1 - a^2 = (1 + a)(1 - a)$$

¡Atención! No importa el orden en que escribamos los binomios conjugados. Recuerda que el orden de los factores no altera el producto. Podemos escribir primero el que lleva –, y luego el que lleva +, o viceversa.

SESIÓN 24 ¿Y SI SON TAN IGUALES QUE SON PERFECTOS?

Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Cuando elevo al cuadrado un binomio, es decir, cuando multiplico dos binomios iguales, obtengo un resultado que también es conocido, o sea, que también es un producto notable.

Por ejemplo:

$$(a + b)(a + b),\ (5x^3 - 3y^2)(5x^3 - 3y^2)$$

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Qué pasa cuando multiplico dos binomios iguales?
- Multiplica los dos ejemplos de binomios anteriores y reduce términos semejantes.
- ¿Cuál es el resultado del producto?

Como habrás notado al elevar binomios al cuadrado, o sea, al multiplicar dos binomios iguales, sucede lo siguiente:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Recuerda que al reducir términos semejantes los dos términos de enmedio no se eliminan, como en el caso de los binomios conjugados, pues en este caso los signos son iguales, y por lo tanto se suman, como lo establecen las leyes de los signos. Entonces, $+ ab + ab = 2ab$.

¿Qué pasa si los binomios conjugados se restan en vez de sumarse? Si tenemos:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2-ab-ab+b^2\\ &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

Al resultado de binomios al cuadrado, se le llama **trinomio cuadrado perfecto**, y éste también es un producto notable:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

Trinomio cuadrado perfecto

Sabemos que siempre sucede lo mismo con cualquier par de binomios iguales elevados al cuadrado.

$$\begin{aligned}(5x^3-3y^2)^2 &= (5x^3-3y^2)(5x^3-3y^2)\\ &= 25x^6-15x^3y^2-15x^3y^2-9y^4\\ &= 25x^6-30x^3y^2+9y^4\end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando tengamos que multiplicar un binomio al cuadrado, es decir dos binomios iguales, no hace falta que efectuemos todos los pasos de la multiplicación: *simplemente escribimos el cuadrado del primer término más el doble del producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.*

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(4x+5y)^2 &= (4x+5y)(4x+5y)\\ &= 16x^2+40xy+25y^2\end{aligned}$$

¡Atención! El término $40xy$ se obtuvo de multiplicar dos veces los términos del binomio $4x \cdot 5y$. Los términos de los extremos son los cuadrados de $4x$ y $5y$, respectivamente.

Analiza otros ejemplos:

$$(m-n)^2 = m^2-2mn+n^2$$
$$(3a-2b)^2 = 9a^2-12ab+b^2$$
$$(4x+7y)^2 = 16x^2+56xy+49y^2$$

Entonces, cuando identifiquemos un trinomio cuadrado perfecto, sabemos que el resultado de su factorización será el producto de dos binomios iguales. ¿Cuáles? Aquellos que son raíces cuadradas de los términos de los extremos de la expresión a factorizar.

Por ejemplo, supongamos que queremos factorizar la siguiente expresión algebraica. Al verla, sospechamos que es un trinomio cuadrado perfecto.

$$25a^2 - 60ab + 36b^2$$

Primero requiero saber de qué números son cuadrados los dos términos cuadráticos de la expresión:

$$25a^2 = (5a)^2$$
$$36b^2 = (6b)^2$$

Ahora, para cerciorarme de que efectivamente esta expresión es un trinomio cuadrado perfecto, debo verificar si el término que no es cuadrático es, efectivamente, el doble del producto de los términos cuyos cuadrados son los términos cuadráticos.

$$2 \cdot 5a \cdot 6b = 60ab$$

El signo que antecede a este término del trinomio puede ser + o – . Si es – me indica que en el binomio que obtenga al factorizar debe haber un signo –.

Entonces la factorización quedará de la siguiente manera:

$$25a^2 - 60ab + 36b^2 =$$
$$(5a - 6b)(5a - 6b) =$$
$$(5a - 6b)^2$$

Para saber más

Sobre las propiedades de los exponentes, consulta: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Resolucion_geometrica_ecuaciones/ecuacion.htm http://www.conevyt.org.mx/cursos/enciclope/algebra.html

Actividad 14

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas. Cuando termines, consulta el Apéndice 1.

A. $4x^2 + 8x + 1 =$

B. $25c^2 - 4 =$

C. $121y^2 + 22yz + z^2 =$

D. $1 - 36t^2 =$

E. $49a^4 - 42a^2b + 9b^2 =$

F. $81x^4 - 49y^2 =$

SESIÓN 25 CADA UNO TIENE SU CADA CUAL

Factorización de trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$

Analicemos ahora los productos de dos binomios que tengan la forma: $x + a$, donde x es la incógnita y a es un número cualquiera. Por ejemplo, $x + 8$, $x - 4$, $x + 1$, etcétera.

Multipliquemos dos binomios con esa forma:

$$(x + 8)(x - 4) = x^2 + 8x - 4x - 32$$

Reduciendo términos semejantes (los dos de en medio son semejantes):

$$(x + 8)(x - 4) = x^2 + 4x - 32$$

Analiza otros ejemplos. ¿Qué patrones comunes identificas?

$$(x-7)(x+5) = x^2 + 5x - 7x - 35 = x^2 - 2x - 35$$
$$(x-6)(x-9) = x^2 - 6x - 9x + 54 = x^2 - 15x + 54$$
$$(x+1)(x-5) = x^2 - 5x + x - 5 = x^2 - 4x - 5$$

Observa que el primer término siempre es x^2.

Ve también que el coeficiente numérico del término medio del trinomio resultante es la suma de los dos números de los binomios. En el primer ejemplo, $8 - 4 = 4$, en el segundo, $-7 + 5 = 2$, en el tercero, $-6 - 9 = -15$, y en el cuarto, $1 - 5 = -4$, y ese número siempre está multiplicado por x.

Además, el tercer término del trinomio es el producto de esa misma pareja de números que aparece en el binomio. En el primer ejemplo, $(8)(-4) = -32$, en el segundo, $(-7)(5) = -35$, en el tercero, $(-6)(-9) = 54$, y en el cuarto, $(1)(-5) = -5$.

Eso significa que ese tipo de productos siguen un patrón, y por tanto podemos ahorrar pasos para efectuarlos. Por ejemplo, cuando multiplicamos:

$$(x + 4)(x - 7) = x^2 - 3x - 28$$

El primer término es x^2, el segundo término se encuentra sumando $4 - 7 = -3$ y multiplicando por x, y el tercer término se encuentra multiplicando $(4)(-7)$.

Analiza estos ejemplos y ve cómo se aplica este procedimiento:

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$
$$(x-5)(x+8) = x^2 + 3x - 40$$
$$(x-9)(x+2) = x^2 - 7x - 18$$

Entonces cuando queremos factorizar **trinomios de la forma $x^2 + bx + c$**, siempre que existan dos números que sumados den b y multiplicados den c, la factorización será el producto de dos binomios que sean la suma de x con cada uno de esos números.

$$(x + a)(x + d) = x^2 + (a + d)x + (ad)$$

Trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$

Si quiero factorizar:

$$x^2 - 7x + 12$$

Debemos encontrar dos números que sumados den -7 y multiplicados den 12.

$$(?) + (?) = -7$$
$$(?)(?) = 12$$
$$-3 + -4 = -7$$
$$(-3)(-4) = 12$$

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Cuáles son esos números?

Por lo tanto la factorización quedará así:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

Otros ejemplos:

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4),\ \text{porque: } -6 + 4 = -2,\ (-6)(4) = -24$$
$$x^2 + x - 42 = (x - 6)(x + 7),\ \text{porque: } -6 + 7 = 1,\ (-6)(7) = -42$$

Actividad 15

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

A. $x^2 - 9x + 14 =$

B. $x^2 + 10x - 16 =$

C. $x^2 + 5x - 24 =$

D. $x^2 - 5x - 36 =$

E. $x^2 - 7x + 10 =$

No olvides revisar tus respuestas en el Apéndice 1, eso te confirmará cómo vas al factorizar.

SESIÓN 26 ¿Y HAY DE FORMAS A FORMAS?

Factorización de trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$

Analicemos ahora los productos de dos binomios que tienen la forma: $ax + b$, donde x es la incógnita y a y b son números cualquiera. Por ejemplo:

$$3x + 5, \qquad 7x - 4, \qquad x + 6$$

Observa cómo en este caso el coeficiente de la x no es necesariamente 1, como en los ejemplos anteriores.

Multipliquemos dos binomios con esa forma, y reduzcamos los términos semejantes:

$$(4x+7)(2x-5) = 8x^2 - 20x + 14x - 35$$
$$= 8x^2 - 6x - 35$$

Analiza otros dos ejemplos:

$$(2x-7)(3x+6) = 6x^2 + 12x - 21x - 42 = 6x^2 - 9x - 42$$
$$(x-5)(9x-3) = 9x^2 - 3x - 45x + 15 = 9x^2 - 48x + 15$$

Como podrás observar, el resultado de estos productos es un trinomio de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

Para factorizar trinomios de este tipo tenemos que realizar el proceso inverso al que se realiza en la multiplicación. Éste lleva varios pasos que seguiremos mediante un ejemplo.

Si queremos factorizar:

$$20x^2 - 2x - 6$$

Paso 1. Multiplicamos a por c

$$a = 20, \quad c = -6; \quad (20)(-6) = -120$$

Paso 2. Buscamos dos números que sumados den b (el coeficiente del término medio), y multiplicados den ac.

En el ejemplo, dos números que sumados den −2, y multiplicados den −120.

$$(?) + (?) = -2$$
$$(?)(?) = -120$$

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

¿Cuáles son esos números para este ejemplo?

glosario

Finito: que tiene fin o límites.

Existe un infinito de parejas de números que sumados dan −2, y, desde luego, hay muchos números que multiplicados dan −120 aunque son un número **finito**, sin embargo, solamente una pareja cumple ambas condiciones.

Debemos probar, de entre todas las parejas de números que multiplicados dan −120, aquella que cumpla que su suma sea −2. Nos puede ayudar descomponer a −120 en factores primos:

$$-120 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Las parejas que multiplicadas dan −120, son todas las posibles combinaciones de esos 5 números. ¡Son muchas! Sin embargo, alguna de estas combinaciones es la que nos sirve. Observa cómo podemos combinar esos 5 números:

Primero dejamos a un 2 solo y multiplicamos a los otros cuatro números:

$$(-(2))((2)(2)(3)(5))$$
$$=(-2)(60)=-120$$
$$o$$
$$=(2)(-60)=-120$$

Pero esta pareja de números al sumarse da 58 o –58, dependiendo del número que lleve el signo negativo.

Ahora multiplicamos dos 2 y multiplicamos a los otros 3 números:

$$(-(2)(2))((2)(3)(5))$$
$$=(-4)(30)=-120$$
$$o$$
$$=(4)(-30)=-120$$

Pero esta pareja de números al sumarse da 26 o –26, dependiendo del número que lleve el signo negativo.

Ahora multiplicamos un 2 y un 3 y multiplicamos a los otros 3 números:

$$(-(2)(3))((2)(2)(5))$$
$$=(-6)(20)=-120$$
$$o$$
$$=(6)(-20)=-120$$

Pero esta pareja de números al sumarse da 14 o –14, dependiendo del número que lleve el signo negativo.

Ahora multiplicamos un 2 y un 5 y multiplicamos a los otros 3 números:

$$(-(2)(5))((2)(2)(3))$$
$$=(-10)(12)=-120$$
$$o$$
$$=(10)(-12)=-120$$

¡Esta última es la pareja de números que buscamos! Fíjate como al sumarse obtenemos –2. Aunque faltaban otras parejas de números que multiplicadas dan –120, como –8 y 15, –24 y 5, etcétera, ya no hace falta seguir, pues tenemos a la que buscábamos, y así concluimos el paso 2.

Los dos números son 10 y –12.

Paso 3. Utilizamos esos números para separar el término bx del trinomio en dos términos cuyos coeficientes sean estos números.

En el ejemplo el término bx es: $-2x$

Lo reescribimos en el trinomio como $+10x - 12x$, lo que no afecta pues la suma de estos sigue siendo $- 2x$. El trinomio ahora queda con cuatro términos:

$$20x^2 - 2x - 6 = 20x^2 + 10x - 12x - 6$$

Paso 4. Factorizamos por separado los dos primeros términos, y los dos últimos:

$$20x^2 + 10x - 12x - 6 = 20x(2x + 1) - 6\,(2x + 1)$$

¡Atención! El binomio $(2x + 1)$ es un factor común, y se puede factorizar.

Paso 5. Factorizamos el binomio que es factor común en los dos términos que quedaron. En el ejemplo factorizo $(2x + 1)$:

$$10x(2x + 1) - 6(2x + 1) = (2x + 1)(10x - 6)$$

Por lo tanto la factorización quedará así:

$$20x^2 - 2x - 6 = (2x - 1)(10x - 6)$$

Para verificarlo, multiplica los binomios y obtendrás el trinomio original.

SESIÓN 27 HAY DIVERSAS FORMAS, PERO TODOS TIENEN SU FORMA

¡Hagamos otro ejemplo paso a paso!

$$10x^2 - 11x - 6$$

Paso 1. Multiplicamos a por c.

$$(10)(-6) = -60$$

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cuáles son esos números para este ejemplo?

Paso 2. Buscamos dos números que sumen -11 y que multipliquen -60

$$(?) + (?) = -11$$
$$(?)(?) = -60$$

Los números que buscamos son: -15 y 4. Si no tienes claro cómo obtenerlos, revisa de nuevo el paso 2 del ejemplo anterior.

Paso 3. Utilizamos esos números para separar el término bx del trinomio en dos términos cuyos coeficientes sean estos números.

$$10x^2 - 11x - 6 = 10x^2 - 15x + 4x - 6$$

Paso 4. Factorizamos por separado los dos primeros términos y los dos últimos.

$$10x^2 - 15x + 4x - 6 = 5x(2x - 3) + 2(2x - 3)$$

Paso 5. Factorizamos el binomio.

$$5x(2x - 3) + 2(2x - 3) = (2x - 3)(5x + 2)$$

$$10x^2 - 11x - 6 = (2x - 3)(5x + 2)$$

¡Terminamos!

Actividad 16

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

A. $4x^2 + 15x + 9 =$

B. $3x^2 - 13x - 30 =$

C. $6x^2 + 7x - 5 =$

D. $8x^2 - 14x - 15 =$

El siguiente cuadro resume los tipos de factorización que hemos aprendido

Tipos de factorización	
Factor común	$ax + ay = a(x + y)$
Diferencia de cuadrados	$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
Trinomio cuadrado perfecto	$x^2 - 2xy + y^2 = (x + y)^2$
Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	$(x + n)(x + m)$
Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	$(mx + n)(px + q)$

17

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

A. $4x^2 + 24xy + 36y^2 =$

B. $25x^2 - 100 =$

C. $x^2 - 3x - 70 =$

D. $6x^2 + 13x + 6 =$

E. $4x^2y + 12xy^3 - 8x^3y^2 =$

Revisa el Apéndice 1 para verificar los aciertos y errores en ambas actividades.

FICHERO

Elabora ahora la ficha de resumen sobre factorización de procesos notables. Escribe la ecuación de cada producto y resume en tus propias palabras el procedimiento que debes seguir para factorizarlo.

¿Se presentan los productos notables en la realidad? Quizá te resulte difícil hallarlos en el día a día. Investiga las situaciones del mundo en las cuales se presentan.

SESIÓN 28 Y CADA PROBLEMA TIENE SU SOLUCIÓN

Método de factorización para resolver ecuaciones cuadráticas

El método de factorización se utiliza para resolver problemas de la vida cotidiana que involucran ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, busquemos la solución para la ecuación cuadrática: $2x^2 - 3x = 9$. Recuerda que necesitamos despejar a la x.

La forma general de esta ecuación es: $2x^2 - 3x - 9 = 0$

No podemos despejar a la x, sin embargo, podemos factorizar la expresión de modo que tengamos dos binomios de grado 1. ¿De qué tipo de producto notable se trata? ¿Recuerdas cómo factorizarlo? Es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

$2x^2 - 3x - 9$ se factoriza encontrando dos números que multiplicados den -18 y sumados den -3. Esos números son -6 y 3.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 9 &= 2x^2 - 6x + 3x - 9 \\ &= 2x(x-3) + 3(x-3) \\ &= (x-3)(2x+3) = 0 \end{aligned}$$

De aquí podemos encontrar dos soluciones para la ecuación cuadrática. Como el producto de los dos factores encontrados es igual a 0, las dos posibilidades para obtener 0 son, que la primera sea 0, o que la segunda sea 0. Recuerda que el producto de un número por 0 es 0.

Si $x - 3 = 0$, entonces $x = 3$, ésta es la primera solución.

Si $2x + 3 = 0$, entonces $x = \frac{-3}{2}$, ésta es la segunda solución.

¡Atención! Las ecuaciones cuadráticas generalmente tienen dos soluciones.

Veamos otros ejemplos.

Resolvamos la ecuación cuadrática $x^2 + 6x - 40 = 0$ por factorización. ¿A qué producto notable corresponde? Es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y por lo tanto puedo factorizarlos como $(x + n)(x + m)$

$x^2 + 6x - 40$ se factoriza así: $(x + 10)(x - 4)$

Por lo tanto, $(x + 10)(x - 4) = 0$

Si $x + 10 = 0$, entonces $x = -10$

Si $x - 4 = 0$, entonces $x = 4$

Un ejemplo más. Resuelve la ecuación cuadrática $4x^2 - 20x + 25 = 0$ por factorización.

$4x^2 - 20x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto que se factoriza $(2x - 5)^2$

Por lo tanto.

$$(2x - 5)^2 = 0$$
$$(2x - 5)(2x - 5) = 0$$

Los dos binomios son iguales. Si $(2x - 5) = 0$, entonces $x = \dfrac{5}{2}$

Es la única solución.

Ahora analiza el siguiente problema.

La edad del papá de Ana es igual al cuadrado de la suya; dentro de 24 años la edad del papá será el doble de la de Ana. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cuáles son las incógnitas del problema?
- ¿Cómo podemos traducirlo al lenguaje algebraico?
- ¿Cómo se resuelve?

Este problema se traduce al lenguaje algebraico de la siguiente manera:

Edad de Ana: x. Edad del papá de Ana: x^2. Dentro de 24 años, la edad de Ana: $x + 24$. Dentro de 24 años, la edad del papá: $x^2 + 24$

Como la edad de Ana será igual al doble de la edad del papá dentro de 24 años, la ecuación quedará:

$$2(x + 24) = x^2 + 24$$

Si hacemos operaciones y reducimos términos con la ecuación llegaremos a lo siguiente:

$$2x + 48 = x^2 + 24$$
$$x^2 - 2x = 24$$

Para resolver este tipo de ecuaciones cuadráticas, podemos usar la factorización.

Si hacemos operaciones y reducimos términos con la ecuación llegaremos a lo siguiente:

$$x^2 - 2x = 24$$
$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

Si utilizamos el método de factorización para resolver esta ecuación y despejamos, tenemos:

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4) = 0$$
$$x = 6, \qquad x = -4$$

Como x, en el contexto del problema, representa la edad de Ana, ésta no puede ser -4. La solución al problema es: $x = 6$

La edad de Ana es **6 años**, la de su padre es $6^2 = 36$ **años**.

Sesión 29. El factor es importante

Actividad 18

A. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de factorización.

a. $x^2 + 3x = 18$

b. $4x^2 - 9 = 0$

c. $x^2 - 12x = 36$

d. $5x^2 + 6x + 1 = 0$

B. Resuelve los siguientes problemas utilizando el método de factorización:

a) Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Encuentra la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2.

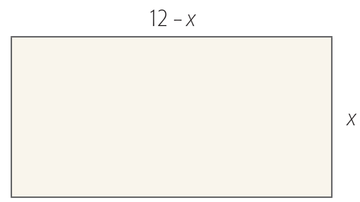
b) Dentro de 11 años la edad de Hugo será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Hugo.

Cuando termines revisa tus resultados y el procedimiento en el Apéndice 1.

Ahora retomemos el problema 6, en lo que se refiere al área de la cafetería. El arquitecto sugirió que debía ser de 35 m^2. El perímetro deseado es de 24 m.

Sean x y y los lados del rectángulo. Sabemos que si el perímetro es 24 la mitad del mismo es 12, y que equivale a sumar los lados contiguos.

$$x + y = 12$$
$$y = 12 - x$$



El área, que es igual a la base por la altura, debe ser igual a 35. Entonces:

$$(x)(12 - x) = 35$$
$$12x - x^2 = 35$$

De donde se obtiene la siguiente ecuación.

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

Buscamos dos números que multiplicados den 35 y sumados den –12. Éstos son –7 y –5.

$$x^2 - 12x + 35 = (x - 7)(x - 5)$$

De donde:

$$x = 7, \qquad x = 5$$

Encontramos dos valores distintos para x. Podemos tomar cualquiera de los dos indistintamente, pues no hemos establecido cuál es el ancho y cuál el largo.

Si $x = 7$ m, entonces x es el largo y $y = 12 - 7 = 5$ m, es el ancho. Viceversa, si $x = 5$ m, entonces, x es el ancho y $y = 12 - 5 = 7$ m, es el largo.

Por lo tanto las medidas deseadas de la cafetería son 7 m por 5 m.

Sesión 30. ¿Cuánto medirá el área de entrenamiento?

Método de fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

PROBLEMA 7 Además de las dos canchas principales, el terreno les permitirá agregar una cancha de entrenamiento de 50 m de largo por 34 m de ancho. Esta cancha tendrá una zona techada con aparatos para el calentamiento, que rodeará toda la

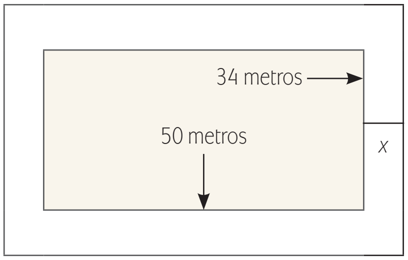
UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cómo podemos resolver este problema?
- ¿Cómo podemos escribirlo en lenguaje algebraico?

cancha. ¿Cuál deberá ser el ancho de la zona de calentamiento si se les recomendó que su área sea 540 m^2?

Intenta plantearlo, traducirlo al lenguaje algebraico y resolverlo.

Llamemos x al ancho de la zona de calentamiento, que es la incógnita de este problema. Ayudémonos de un dibujo para representar el problema.



¿Cómo podemos plantear una ecuación para este problema?

Los datos que podemos utilizar son el largo y el ancho de la cancha y el área de la zona de calentamiento. Por un lado, el área del rectángulo exterior, menos el área del rectángulo interior es igual al área techada para calentamiento. Por otro lado, sabemos que el área de esa zona debe ser igual a 540 m^2. Debemos igualar esas dos informaciones para conformar una ecuación.

El área del rectángulo interior es: $(34)(50) = 1700$

Cada uno de los lados del rectángulo exterior mide $2x$ unidades más que los del rectángulo interior. Por lo tanto, su área es: $(2x + 34)(2x + 50)$

Si efectuamos el producto de ambos polinomios tenemos:

$$(2x + 34)(2x + 50)$$
$$= 4x^2 + 100x + 68x + 1{,}700$$
$$= 4x^2 + 168x + 1{,}700$$

Y si le quitamos el área del rectángulo interior, 1,700, obtenemos el área de la zona de calentamiento, que además es igual a 540.

$$4x^2 + 168x + 1{,}700 - 1{,}700 = 540$$
$$4x^2 + 168x = 540$$

Esta es la ecuación que representa al problema. El primer término contiene una x elevada al cuadrado, por lo que una vez más nos encontramos ante una ecuación cuadrática.

SESIÓN 31 La fórmula general...

Otro método para resolver ecuaciones cuadráticas es utilizando la **fórmula general**. Para una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c$, sustituimos los valores de a, b y c de la ecuación cuadrática a la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le conoce como *fórmula general.*

La parte de dentro de la raíz, $b^2 - 4ac$ se le llama **discriminante**, porque sirve para *discriminar* entre los tipos posibles de respuesta. Si es positivo, habrá dos soluciones; si es 0 sólo hay una solución; y si es negativo hay dos soluciones que incluyen números imaginarios. Estos últimos son números que no son reales, y que no serán discutidos en esta unidad.

glosario

Discriminar: diferenciar una cosa de otra.

Analicemos como ejemplo la siguiente ecuación cuadrática y busquemos su solución con la fórmula:

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$
$$a = 2, \qquad b = -3, \qquad c = -9$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-9)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm 9}{4}$$

¡Atención!

- El signo ± nos indica que a partir de aquí obtendremos dos valores: con 9 positivo y con 9 negativo.

El primer valor es: $x = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3$; el segundo valor es: $x = \frac{3-9}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

Observa que son los mismos que obtuvimos factorizando.
Estudia otro ejemplo. Resolvamos la ecuación cuadrática: $x^2 - 2x - 48$.
Sabemos que $a = 1$, $b = -2$, $c = -48$.
Sustituyendo en la fórmula:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 14}{2}$$

El primer valor es: $x = \frac{2+14}{2} = \frac{16}{2} = 8$; el segundo valor es: $x = \frac{2-14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$

Actividad 19

A. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por la fórmula general.

a. $2x^2 - 9x = 5$

b. $x^2 + 5x = 14$

c. $3x^2 + 5x + 2 = 0$

B. Resuelve los siguientes problemas por la fórmula general.

a) Si a un lado de un cuadrado se le alarga 2 m y al contiguo 7 m obtenemos un rectángulo cuya área es 22 m^2 más el doble de la del cuadrado. Calcular las dimensiones del cuadrado.

b) La suma de dos números es 5 y su producto es −84. Encuentra dichos números.

Revisa tus respuestas consultando el Apéndice 1. ¡Seguro te sentirás satisfecho!

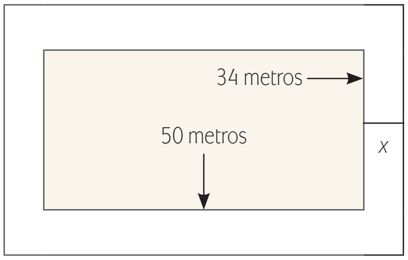
SESIÓN 32 ¿CÓMO DETERMINAMOS EL ÁREA DE ENTRENAMIENTO?

¡Estás preparado para resolver el problema 7, que tiene que ver con la zona de calentamiento! En éste se exponía lo siguiente:

Se quiere construir una cancha rectangular, de 50 m de largo por 34 m de ancho, que estará rodeada por una zona de calentamiento de carreras. ¿Cuál es el ancho de esta zona si se sabe que su área es 540 m^2?

Ésta es una manera de solucionarlo:

Retomemos el dibujo que habíamos hecho, para que podamos entender más claramente la situación:



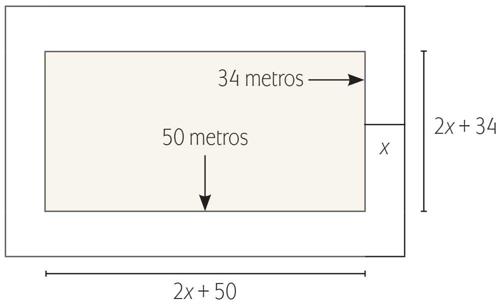
Recuerda que queremos encontrar el ancho de la zona de calentamiento que rodeará a la cancha. Ésta es el rectángulo de adentro, y tiene un área de

$(34)(50) = 1{,}700$ m^2.

Si la zona de calentamiento debe tener un área de 540 m^2, entonces, el rectángulo exterior tiene un área de $1{,}700 + 540 = 2240$ m^2.

Su base y su altura, en lenguaje algebraico, las podemos expresar como:

$2x + 50$, $2x + 34$, respectivamente.



Ya habíamos encontrado la ecuación, pero revisemos los pasos.
El área del rectángulo interior es: (34)(50) = 1,700 m^2.
El área del rectángulo exterior es:

$$\begin{aligned}(2x + 34)(2x + 50) &= 4x^2 + 100x + 68x + 1{,}700\\ &= 4x^2 + 168x + 1{,}700\end{aligned}$$

A éste le restamos el área del rectángulo interior y así obtenemos el área de la zona de calentamiento, que además sabemos debe ser 540 m^2.

$$4x^2 + 168x + 1{,}700 - 1{,}700 = 540$$

$$4x^2 + 168x = 540$$

$$o$$

$$4x^2 + 168x - 540 = 0$$

Usando la fórmula general tenemos:

$$x = \frac{-168 \pm \sqrt{(168)^2 - 4(4)(-540)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-168 \pm \sqrt{28{,}224 + 8{,}640}}{8}$$

$$x = \frac{-168 \pm \sqrt{36{,}864}}{8}$$

$$x = \frac{-168 \pm 192}{8}$$

El primer valor es: $x = \dfrac{-168 + 192}{8} = \dfrac{24}{8} = 3$

el segundo es: $x = \dfrac{-168 - 192}{8} = \dfrac{-360}{8} = -45$

La solución que buscamos es la primera, pues x es una distancia y no puede ser negativa. Por lo tanto, el ancho de la zona de calentamiento deberá ser de 3 metros. Usando ecuaciones cuadráticas pudimos hallar la solución sin mayor dificultad.

SESIÓN 33 ¿CUÁNTO DEBERÁN MEDIR LOS VESTIDORES?

Método de completar el cuadrado perfecto para resolver ecuaciones cuadráticas

Finalmente, los colonos piden opiniones sobre las medidas idóneas para la zona de los vestidores. Se requiere un área de 48 m^2 para adecuar la zona de vestidores con todo lo necesario. Desean que el largo sea 8 metros mayor que el ancho para que en el lado mayor quepan las regaderas.

¿Cuánto deben medir los lados del rectángulo que corresponderá al área de vestidores?

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Cómo podemos resolver este problema?
- ¿Cómo podemos escribirlo en lenguaje algebraico?

Intenta plantearlo, traducirlo al lenguaje algebraico y resolverlo.

Si el ancho del rectángulo medirá x y el largo $x + 8$, entonces el área, que es igual a 48, queda representada por la siguiente fórmula: $(x)(x + 8) = 48$

De donde obtenemos: $x^2 + 8x - 48 = 0$

Esta ecuación se puede resolver por los métodos que ya has aprendido, pero reflexiona sobre lo siguiente.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Existe otra forma para resolver esta ecuación además de las revisadas con anterioridad?

Sí. Además de la factorización y la fórmula general, existe el método de **completar un trinomio cuadrado perfecto**. Conocer diferentes formas de resolver los problemas te permite utilizar la que más te convenga según el problema. También te facilita pensar en los problemas de tu vida diaria desde diferentes enfoques, al pensar que, al igual que en las matemáticas, esos problemas pueden tener diferentes formas de enfrentarlos para resolverlos de la mejor manera. Así que, igual que como aprendiste diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, aprenderás diferentes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas.

Recuerda que un trinomio cuadrado perfecto tiene la forma:

$x^2 + 2xy + y$, o

$x^2 - 2xy + y$

Un trinomio cuadrado perfecto se factoriza: $(x + y)^2$ o $(x - y)^2$. El método de completar cuadrado perfecto consiste en modificar una expresión para convertirla en un trinomio cuadrado perfecto.

UN MOMENTO DE REFLEXIÓN

- ¿Qué agregaríamos?
- ¿Por qué?

Si queremos convertir la expresión: $x^2 + bx$ en un cuadrado perfecto, ¿qué debemos agregar?

Se debe agregar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

La expresión $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ es un trinomio cuadrado perfecto porque bx es el doble del producto de los términos cuadráticos, es decir, $bx = (2)(x)\left(\frac{b}{2}\right)$, de modo que agregando $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a la expresión $x^2 + bx$, se completa el cuadrado perfecto. La nueva expresión se factoriza como: $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

¡Veamos un ejemplo con una ecuación cuadrática!

Si tenemos la ecuación: $x^2 + 4x - 21 = 0$, y queremos tener un trinomio cuadrado perfecto para poder factorizarlo.

Primero debemos dejar los términos con x del lado izquierdo, que son los que corresponden a $x^2 + bx$, y el término que no tiene x del lado derecho.

$$x^2 + 4x = 21$$

Entonces del lado izquierdo faltará agregar el término que corresponde a $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, en este caso: $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$

Recuerda que en una ecuación podemos agregar términos siempre y cuando lo hagamos de ambos lados. La ecuación quedará: $x^2 + 4x + 4 = 21 + 4$

El lado izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto. ¡Ahora lo podemos factorizar como un binomio al cuadrado! $(x + 2)^2 = 25$

Para resolver la ecuación obtengo la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación:

$$\sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{25}$$
$$x + 2 = \pm 5$$
$$x = \pm 5 - 2$$
$$x = 3 \quad x = -7$$

Otro ejemplo:

Para resolver la ecuación: $4x^2 - 8x - 5 = 0$ por el método de completar cuadrado perfecto, primero pasamos el 5 del lado derecho, dejando las x del lado izquierdo:

$$4x^2 - 8x = 5$$

A continuación, dividimos entre 4. Recuerda que queremos llevar la expresión a la forma: $x^2 + bx$, por lo que el coeficiente del término cuadrático debe ser 1.

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{8x}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x^2 - 2x = \frac{5}{4}$$

Ahora agrego el término que falta para completar el cuadrado, es decir, el que corresponde a $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ En este caso, $\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{5}{4} + 1$$

En el lado izquierdo tenemos un trinomio cuadrado perfecto. Lo factorizamos.

$$(x-1)^2 = \frac{5}{4} + 1$$

Reducimos términos del lado derecho:

$$(x-1)^2 = \frac{9}{4}$$

Obtenemos raíz cuadrada de ambos lados:

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x - 1 = \pm\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \quad x = \frac{-1}{2}$$

FICHERO

Prepara una ficha de resumen para los tres métodos de solución de ecuaciones cuadráticas que has aprendido: factorizar, aplicar la fórmula general y completar el trinomio cuadrado perfecto. Anota en tus propias palabras el procedimiento que debes seguir.

¿Cuándo y para qué utilizas ecuaciones cuadráticas? Trata de identificar algunas situaciones de tu entorno en las cuales apliquen; si no lo logras, busca en otras fuentes tales como libros de texto de álgebra y sitios de Internet.

SESIÓN 34 ¿YA PARA TERMINAR? ¡SÍ!

Actividad 20

A. Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de completar cuadrado.

a. $9x^2 - 18x + 5 = 0$

b. $x^2 + 6x - 7 = 0$

c. $3x^2 - 24x + 45 = 0$

B. Resuelve el siguiente problema por el método de completar cuadrado

Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Encuentra las dimensiones de la caja.

Revisa el Apéndice 1 para corroborar tus respuestas. Aprovecha también, ya que es una oportunidad de autoevaluarte.

Ahora resolvamos el problema de los vestidores, el 8, mediante el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

Teníamos que el largo del rectángulo que será la zona de vestidores debía ser 8 metros mayor que el ancho. Entonces el ancho del rectángulo medirá x y el largo $x + 8$, y como el área es igual a 48 queda representada por la siguiente fórmula:

$$(x)(x + 8) = 48$$

De donde obtenemos: $x^2 + 8x - 48 = 0$

Sumamos 48 de ambos lados y obtenemos: $x^2 + 8x = 48$

Como $b = 8$, entonces, $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$

Entonces sumamos 16 de ambos lados para completar el trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 8x + 16 = 48 + 16$$
$$x^2 + 8x + 16 = 64$$
$$(x + 4)^2 = 64$$

Obtenemos raíz cuadrada de ambos lados:

$$\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{64}$$
$$(x+4) = \pm 8$$

Despejamos x:

$$x+4 = \pm 8$$
$$x = \pm 8 - 4$$

Obtenemos los dos valores de x: $x = 4$, $x = -12$

Por lo tanto, el ancho del área de vestidores deberá ser igual a 4 metros, pues ésta es la respuesta positiva y, en este caso, requiero una respuesta con la que pueda representar una distancia. El largo deberá medir 4 + 8 = 12 metros.

¡Felicidades! Has aprendido a resolver ecuaciones cuadráticas utilizando tres diferentes métodos.

Hemos llegado al final de esta unidad y del módulo. ¿Te das cuenta de la gran utilidad de las competencias matemáticas que has desarrollado en esta unidad? La aritmética y el álgebra te permitirán modelar muchas de las situaciones cotidianas que enfrentas en tu vida diaria, tanto para iniciar un negocio, hacer compras o inversiones, y muchas otras actividades en las que requieras de utilizar números y encontrar cantidades desconocidas. Con base en esta información tendrás más elementos para fundamentar las decisiones que vayas tomando. A manera de cierre, realiza una última evaluación sobre la lista de cotejo siguiente, en la cual puedas constatar la aplicación de las competencias algebraicas que has estudiado.

Para terminar colorea en la siguiente tabla tu nivel de avance. Toma en cuenta que el máximo es 5 y el mínimo 1.

Utilizar operaciones algebraicas con polinomios para la solución de problemas					
Criterios de desempeño	**Nivel de desempeño**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Sé identificar los datos del problema.					
Sé determinar cuál es el cuestionamiento del problema.					
Sé traducir del lenguaje común al algebraico.					
Sé simplificar el lenguaje para resolverlo.					
Sé realizar operaciones con polinomios para llegar a la solución.					
Sé resolver ecuaciones lineales.					
Sé graficar ecuaciones lineales.					
Sé resolver sistemas de ecuaciones lineales.					
Sé resolver ecuaciones cuadráticas.					
Sé resolver problemas de diversas áreas del conocimiento relacionados con mi entorno utilizando ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas.					

Si al responder a la lista de cotejo algún resultado es de 3 o menos, te recomendamos repases ese tema, para afirmar los conocimientos, que te serán necesarios en otros módulos y, sobre todo, en tu desarrollo posterior.

CIERRE

SESIÓN 35 ¿EN QUÉ OBSERVÉ LA APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES EN MI VIDA COTIDIANA?

Es muy probable que en tu día a día te encuentres situaciones y preguntas similares a las que aprendiste a resolver en esta unidad, y a las que enfrentaron los colonos al incursionar en el negocio de futbol. En tu bitácora debes haber registrado algunas si fuiste sistemático. ¿Cuáles son esas situaciones que implican relaciones entre cantidades que puedes plantear como ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones o ecuaciones cuadráticas? Si en tu vida cotidiana no las enfrentaste, ¿pudiste investigar en qué tipo de problemas se presentan? Para terminar el módulo deberás buscar tres problemas que involucren ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas. Es recomendable que sea un problema para cada tipo de ecuación.

Recurre a tu bitácora para facilitar esta tarea. Toma como referencia los problemas que se han ido resolviendo en las distintas sesiones y también considera las interrogantes que enfrentaron los colonos. Si es necesario, consulta otros ejemplos en libros de Álgebra o en Internet.

Registra en los espacios siguientes los tres problemas que propones, incluyendo:

1. El planteamiento del problema en lenguaje común.
2. El planteamiento del problema en lenguaje algebraico.
3. Los pasos a seguir para resolver el problema.
4. El resultado.
5. Los conceptos o principios algebraicos que has aplicado para llegar a la solución.

Para realizar esta actividad, consulta las fichas de resumen que has ido elaborando y aplica los conceptos y procedimientos que anotaste. Aprovecha este momento para volverlas a revisar y verificar que los has aprendido.

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Cuando termines de plantear estos problemas, revísalos con el apoyo de alguien cercano a ti: un familiar, un amigo o un miembro de tu comunidad que tenga conocimientos de matemáticas. Si no tienes a alguien cercano a quien consultar, recurre a un Centro de Servicio de Preparatoria Abierta.

¡Felicidades! ¡Has concluido la segunda unidad y con ello has finalizado el módulo!

¿Estás listo para presentar tu examen? Para valorar el nivel de competencia que has desarrollado completa la evaluación final del módulo: *¿Ya estoy preparado(a)?*

Gestión del aprendizaje

En esta modalidad tú eres responsable de tu aprendizaje. Aprovecha la evaluación del módulo como una oportunidad para obtener información sobre lo que has aprendido y lo que te falta aprender. Antes de iniciarla haz una autoevaluación de tus aprendizajes, identifica los conceptos y procedimientos que ya dominas y aquellos que requieres practicar más. Estudia y realiza los ejercicios adicionales que sean necesarios. Utiliza como referencia los materiales sugeridos para obtener mayor información. Cuando estés listo resuelve la evaluación final: *¿Ya estoy preparado(a)?* Hazlo en las mismas condiciones que tendrías en el examen: sin libros ni notas. En esta modalidad, tú eres responsable de tu propio aprendizaje.

¿Ya estoy preparado(a)?

Actividad

Completa la siguiente evaluación para valorar tu aprendizaje y obtener información sobre tu dominio de las competencias relacionadas con este módulo.

Instrucciones:

Lee con detenimiento cada uno de los problemas y resuélvelo aplicando los conceptos y procedimientos aritméticos y algebraicos que has estudiado en este módulo. Anota el proceso que utilizas para llegar a la solución.

Después, responde las preguntas que se plantean sobre éste; para ello, elige la opción correcta. Sólo hay una respuesta correcta para cada interrogante.

Problema 1

Una pared rectangular tiene un perímetro de 24 m. El largo (l) de la pared es el doble del alto (a). ¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar la pared, si se utiliza 1 litro de pintura por cada 5 m^2 de pared?

I. ¿Cuál es la solución para el problema?

a) 8.2 b) 3.2 c) 6.4 d) 2.4

II. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones puede representar algebraicamente este problema?

a) 6a = 24 b) $8a + 2l = 24$ c) $6a + 5 = 24$ d) $4a + 3l = 24$

III. ¿Cómo puede escribirse la relación de proporcionalidad que existe entre la pared y los litros de pintura que se necesitan para pintarla?

a) $\frac{5}{32} = \frac{x}{1}$ b) $\frac{5}{32} = \frac{1}{x}$ c) $\frac{5}{24} = \frac{1}{x}$ d) $\frac{5}{24} = \frac{x}{1}$

Problema 2

En un expendio de café se quiere vender una mezcla que cueste \$12.00 por kilogramo y que combine dos tipos de grano: el arábico, que cuesta \$10.00 por kilogramo y el robusto, que cuesta \$15.00. ¿Cuántos kilogramos de café de cada tipo se deben mezclar para obtener, a ese costo, 50 kilogramos de dicha mezcla?

I. ¿Cuál es la solución a este problema?

a) 30 de arábico y 20 de robusto
b) 20 de arábico y 30 de robusto
c) 35 de arábico y 15 de robusto
d) 15 de arábico y 35 de robusto

II. ¿Cuáles son las cantidades desconocidas en el problema anterior?

a) El costo del kilogramo de arábico y de robusto que llevará la mezcla

b) El costo de 50 kilogramos de café de arábico y de robusto
c) El peso en kilogramos de la mezcla de arábico y de robusto por $12
d) El cantidad en kilogramos de arábico y de robusto que llevará la mezcla

III. ¿Qué propiedades de la igualdad utilizas para resolver las ecuaciones del problema anterior?

a) Propiedad de la potencia y de la resta
b) Propiedad de la raíz y de la multiplicación
c) Propiedad de la resta y de la división
d) Propiedad de la división y de la raíz

Problema 3

Jaime pinta una pared a una rapidez de $7\frac{3}{4}$ m^2 por hora. Si entre él y Francisco, pintan $28\frac{7}{10}$ m^2 en dos horas, ¿cuántos metros cuadrados pinta Francisco en una hora?

I. ¿Cuál es la solución del problema?

a) $5\frac{1}{4}$ b) $8\frac{5}{6}$ c) $7\frac{9}{10}$ d) $6\frac{3}{5}$

II. ¿Cómo puedo escribir en fracciones impropias los metros cuadrados de pintura que pinta Jaime?

a) $\frac{31}{4}$ b) $\frac{25}{4}$ c) $\frac{73}{4}$ d) $\frac{28}{4}$

III. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa el problema anterior?

a) $\frac{31}{4}+x=2\left(\frac{287}{10}\right)$ b) $2\left(\frac{31}{4}+x\right)=\frac{287}{10}$

c) $\frac{31}{4}+x=\frac{287}{10}+2$ d) $\frac{31}{4}+x+2=\frac{287}{10}$

Problema 4

En una escuela primaria, la razón de niñas con respecto a niños es de $\frac{4}{5}$. Si en la escuela hay 1,440 alumnos, ¿cuántas niñas y cuántos niños hay en ella?

I. ¿Cuál es la respuesta al problema?

a) 540 y 900 b) 600 y 840 c) 640 y 800 d) 700 y 740

II. ¿Cómo puedo representar algebraicamente las fracciones equivalentes a $\frac{4}{5}$?

a) $\frac{4m}{5n}$ b) $\frac{8m}{10n}$ c) $\frac{5n}{4n}$ d) $\frac{4n}{5n}$

Problema 5

En una fábrica se tienen 3 tanques llenos de agua, con capacidades de 240, 360 y 540 litros. Su contenido se quiere envasar en cierto número de garrafones de forma exacta, para que el contenido de los tanques pueda vaciarse sin desperdicio alguno. ¿Cuál es la capacidad máxima de los garrafones en los que se puede envasar el agua contenida en cada uno de los tanques? ¿Cuántos garrafones se requieren?

I. ¿Cuál es la solución al problema?

a) 19 garrafones de 60 litros b) 25 garrafones de 40 litros
c) 15 garrafones de 80 litros d) 24 garrafones de 30 litros

Problema 6

¿En cuánto debo vender un terreno si quiero obtener una ganancia del 15% sobre el precio de costo, y lo compré en $380,000.00?

I. ¿Cuál es la solución al problema?

a) $435,000.00 b) $437,000.00 c) $438,000.00 d) $439,000.00

II. En el problema anterior, ¿cuál quiero que sea la razón, en porcentaje, entre el costo y el precio de venta, ya con la ganancia?

a) $\frac{85}{100}$ b) $\frac{15}{100}$ c) $\frac{115}{100}$ d) $\frac{115}{85}$

III. ¿Qué ecuación expresa la relación de proporcionalidad entre el costo y la ganancia?

a) $x=\frac{115(380{,}000)}{100}$ b) $x=\frac{85(380{,}000)}{100}$

c) $x=\frac{100(380{,}000)}{115}$ d) $x=\frac{100(380{,}000)}{85}$

Problema 7

En un estacionamiento hay 120 vehículos entre motocicletas y automóviles, y sus llantas suman 410. ¿Cuántos de los vehículos son motocicletas y cuántos automóviles?

I. ¿Cuál es la respuesta al problema?

a) 80 motocicletas y 40 automóviles

b) 30 motocicletas y 90 automóviles
c) 65 motocicletas y 55 automóviles
d) 35 motocicletas y 85 automóviles

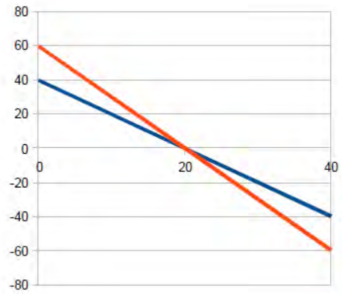
II. ¿Cuáles son las incógnitas del problema anterior?

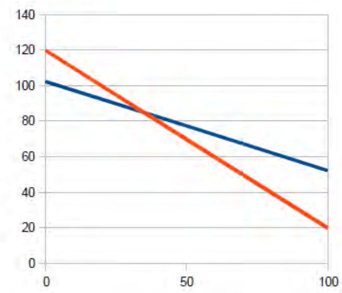
a) La cantidad de llantas por cada motocicleta y por cada automóvil
b) La cantidad total de vehículos entre motocicletas y automóviles
c) La cantidad de motocicletas y la cantidad de automóviles
d) La cantidad total de llantas entre motocicletas y automóviles

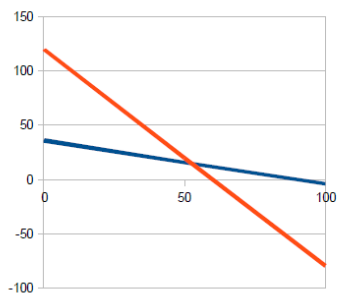
III. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones algebraicas **no** pertenece al sistema de ecuaciones que representa el problema?

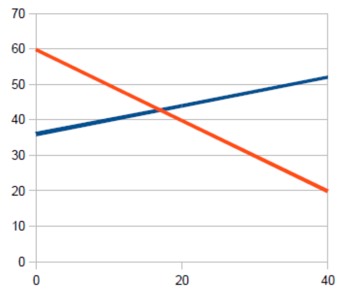
a) $2x + y = 120$
b) $x + y = 120$
c) $2x + 4y = 410$
d) $y = 120 - x$

IV. ¿Cuál es la representación gráfica de este problema?

a) 

b) 

c) 

d) 

Problema 8

La suma de dos números es igual a 64. Si la mitad del menor es igual a la sexta parte del mayor. ¿Cuáles son esos números?

I. ¿Cuál es la solución del problema?

a) 24 y 40 b) 30 y 34 c) 16 y 48 d) 20 y 44

II. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones puedo plantear para resolver este problema?

a) $2x = 6(y)$ b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=64$ c) $2x + 6y = 64$ d) $\frac{x}{2}=\frac{y}{6}$

III. ¿Cuáles de los siguientes métodos **no** puedo utilizar para resolver este problema?

a) Igualación b) Sustitución
c) Completar cuadrado perfecto d) Gráfico

Problema 9

Felipe y Marco coleccionan monedas viejas. Felipe le dice a Marco: "Si me das dos monedas, tendré tantas como tú", y Marco responde: "Sí, pero si tú me das cuatro, entonces tendré cuatro veces más que tú". ¿Cuántas monedas tienen cada uno?

I. ¿Cuál es la solución al problema?
a) 10 y 14 b) 6 y 10 c) 16 y 20 d) 8 y 12

II. Si utilizo m para representar las monedas de Felipe y n para las de Marco, ¿cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones es correcto?

a) $m+2=n-2$
$n+4=4(m-4)$

b) $m+2=n$
$n+4=m-4$

c) $2m+2=2n-2$
$n+4=4(m-4)$

d) $n+2=2(m-2)$
$m+4=n-4$

Problema 10

Julia, Alberto y Susana compraron una cierta cantidad de chocolates. Julia se comió la mitad y uno más. Alberto se comió la mitad de los que quedaban y uno más. Susana se comió la mitad de los que quedaban y uno más. No quedó ningún chocolate. ¿Cuántos chocolates habían comprado?

I. ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

a) 20 chocolates b) 14 chocolates c)16 chocolates d) 18 chocolates

II. Si x es el total de chocolates, ¿qué ecuación representa el número de chocolates que se comió Susana?

a) $\dfrac{\dfrac{\frac{x}{2}-1}{2}-1}{2}$ b) $\dfrac{\frac{x}{2}-1}{2}-1+1$ c) $\dfrac{\dfrac{\frac{x}{2}-1}{2}+1}{2}+1$ d) $\dfrac{\dfrac{\frac{x}{2}-1}{2}-1}{2}+1$

Problema 11

El ingreso por concepto de ventas de una compañía el año pasado fue de $9,765,400.00. Si el ingreso de este año es de $10,937,248.00, ¿cuál fue el porcentaje de incremento en el ingreso anual de este año?

I. ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

a) 12% b) 15% c) 10% d) 18%

II. ¿Cómo puedo representar la razón de ingresos de la compañía del año actual y el año pasado?

a) $\frac{10{,}937{,}248}{100}$ b) $\frac{10{,}937{,}248}{9{,}765{,}400}$ c) $\frac{9{,}765{,}400}{10{,}937{,}248}$ d) $\frac{9{,}765{,}400}{100}$

Problema 12

Rosa lleva a vender al mercado una canasta con huevos de su granja. En el camino se tropieza y se le rompen dos quintas partes de los huevos. Vuelve a la granja por 21 huevos más, y regresa al mercado con un octavo más de la cantidad que tenía al principio. ¿Cuántos huevos tenía al principio?

I. ¿Cuál es la solución a este problema?

a) 45 b) 38 c) 40 d) 36

II. Si x es el número de huevos que Rosa tenía al salir de su casa, ¿qué expresión algebraica representa los huevos que tenía Rosa después de tropezarse?

a) $x-\frac{2}{5}x+21$ b) $x-\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}$ c) $x-\frac{2}{5}x$ d) $x+\frac{2}{5}x$

III. ¿Y al salir de la granja la segunda vez?

a) $x-\frac{2}{5}x+21$ b) $x-\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}$ c) $x-\frac{2}{5}x$ d) $x+\frac{2}{5}x$

Problema 13

Encuentra dos números cuya suma sea 32 y su producto 255.

I. ¿Cuáles son los dos números?

a) 25 y 7 b) 27 y 5 c) 7 y 25 d) 15 y 17

II. ¿De qué grado es la ecuación que tienes que utilizar para resolver este problema?

a) Primero b) Segundo c) Lineal d) Tercero

Problema 14

Las edades de los hijos de Mariana son dos números consecutivos cuyo producto es igual a 56. ¿Qué edad tiene cada uno?

I. ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

a) 7 y 8 b) 6 y 7 c) 8 y 9 d) 4 y 14

II. ¿Cuáles son los dos resultados que obtengo al resolver la ecuación que representa al problema?

a) 7 y 8 b) 6 y 7 c) – 8 y 7 d) – 7 y 8

Problema 15

Encuentra la altura de un triángulo si es 4 metros mayor que el triple de su base, y el área del triángulo es de 170 m^2.

(Recuerda que la fórmula para calcular el área del triángulo es: $\frac{bh}{2}$, donde b representa la base y h la altura del triángulo.)

I. ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

a) 24 b) 34 c) 32 d) 30

II. ¿Qué tipo de expresión algebraica puedo utilizar para representar este problema?

a) Diferencia de cuadrados b) Binomio
c) Trinomio d) Cuadrado perfecto

III. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones **no** expresa al problema anterior?

a) $h = 3b + 4$ b) $\frac{bh}{2} = 170$ c) $b^2 + 340b - 4 = 0$ d) $3b^2 + 4b - 340 = 0$

Apéndice 1

Clave de respuestas ¿Con qué saberes cuento?

1.

I. $= 5 \cdot 16 = 80$

II. $= \dfrac{25}{5} + 8 = 5 + 8 = 13$

III. $= 6 \cdot (41 - 5 \cdot 7) + 4 = 6 \cdot (41 - 35) + 4 = 6 \cdot 6 + 4 = 36 + 4 = 40$

2.

I. $4 \cdot (6 + \underline{5}) = 44$

II. $\dfrac{(27 - \underline{7})}{5} + 4 = 8$

III. $19 \cdot \underline{2} + 4 = 42$

3.

I.

357	537	735	935
359	539	739	937
375	573	753	953
379	579	759	957
395	593	793	973
397	597	795	975

II. 5,200 + 300 = 5,500 – 2,400 = 3,100

III. 434,500 + 65,250 = $499,750

IV. 562,200 – 38,788 = 523,412

V. 8,395 ÷ 365 = 23 años

VI. $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ opciones

VII. $4 \cdot 24 \cdot 2 = 192$ aviones

4.

I. 84 ÷ 12 = 7

II. $\sqrt{121} = 11$ cm es la medida de un lado, el perímetro es $11 \cdot 4 = 44$ cm.

III. 84 ÷ 4 = 21 m.

IV. 36 ÷ 4 = 9, $9^2 = 81$ cm^2

Unidad 1

Actividad 1

Algunas ideas en torno a lo que puede ser importante para abrir un negocio pueden ser, de manera enunciativa y no limitativa.

- Aspectos legales: la constitución y registro de una sociedad (anónima, cooperativa, civil, de responsabilidad limitada, u otra), que le dé personalidad jurídica al negocio. Las altas en el registro público de comercio de la localidad. El uso de suelo. Los registros adicionales que se puedan requerir según el giro del mismo. Para mayor precisión pregunta en la cámara de comercio o las oficinas públicas de tu localidad.
- Aspectos administrativos: es indispensable llevar un control exacto sobre las entradas y salidas de los recursos económicos, tanto para poder contar con ellos en los momentos en que se requieran, como para cubrir los impuestos necesarios.
- Aspectos laborales: tener los contratos de trabajo de los empleados y colaboradores es muy importante, no dejan las cosas al aire o al "es que yo entendí...", que pueden ser fuente de diferencias y problemas. Las aportaciones sociales (IMSS, Infonavit, Afores, etcétera) pueden causar dolores de cabeza si no se atienden con responsabilidad.

Actividad 2

Para resolver este problema utilizamos los números enteros, porque hay que sumar y restar, positivos y negativos, sin decimales ni fracciones.

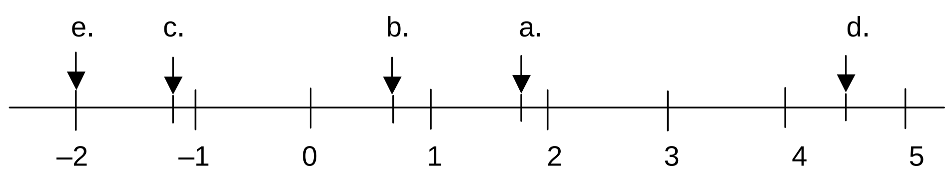
Actividad 3

B.

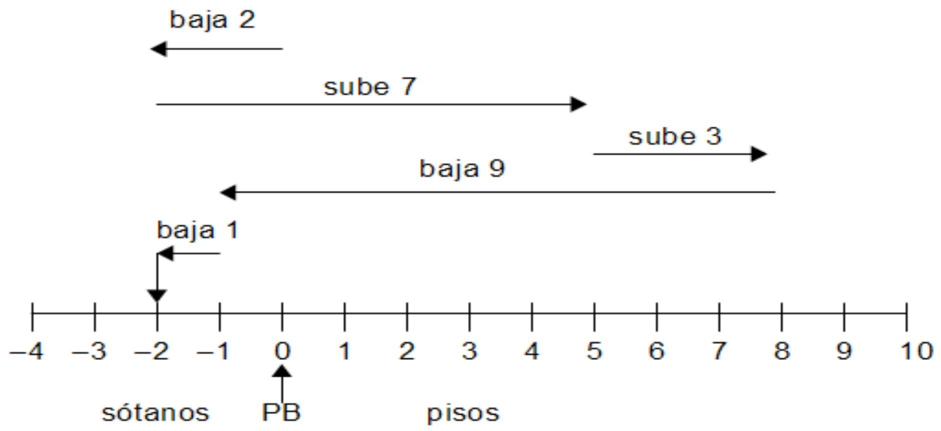
a) Naturales
b) Enteros
c) Racionales (fracciones)
d) Enteros
e) Racionales (decimales)
f) Irracionales

Actividad 4

A.



Actividad 5



Mario se encuentra en el sótano 2.

Actividad 6

A.

|−3.5|	3
|14|	−14
|3|	−3
|−3|	3.5
|−14|	14

B. Lee con atención las siguientes situaciones para identificar los datos que brindan para su resolución.

a) 7
b) 5
c) $2,700.00

Actividad 7

A.

a) 24 – 49 =	–73	–25	25	73
b) –37 – 45	–72	–8	–82	8

c) 15 – –22 =	37	–37	7	–7
d) –2 – –19 =	–17	–21	21	17
e) |–6 – 18| =	12	–24	24	22

B. Resuelve los siguientes problemas aplicando las propiedades de la suma y la resta:
   a) 1954 + 26 + 3 + 21 = 2,004, murió en el 2,004.
   b) Primer entrega: 5,400 kilos. Segunda entrega: 5,400 + 700 = 6,100 kilos. Tercera entrega: 6,100 + 340 = 6440 kilos. En total han llegado: 5,400 + 6,100 + 6,440 = 17,940 kilos. Faltan por llegar: 20,000 – 17,940 = 2,060 kilos. El cargamento con el que les podrán surtir es: 13,600 – 5,400 – 6,100 – 6,440 = –4,340, con el tercer cargamento, a los 30 días de recibido el primero.

Actividad 8

- ¿Qué dice la **propiedad conmutativa** de la suma? Establece que el orden de los sumandos no altera la suma, es decir, $a + b = b + a$.
- ¿Qué dice la **propiedad asociativa** de la suma? Dice que para tres números reales a, b, y c , se pueden sumar primero a y b, y al resultado sumarle c, o se pueden sumar primero b y c, y al resultado sumarle a, o se pueden sumar a y c, y al resultado sumarle b, es decir: $(a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c)$.
- ¿Qué debe cumplir el **neutro aditivo** de los números reales? Debe cumplir que al sumárselo a cualquier número real, el resultado sea el mismo número. El neutro aditivo es el 0, $n + 0 = n$. Ejemplo: 7 + 0 = 7.
- ¿Qué debe cumplir el **inverso aditivo** de un número real? Para cada número real su inverso aditivo debe cumplir que al sumárselo a éste, el resultado sea el neutro aditivo. Para el número real a, existe otro número real $–a$, tal que $a + –a = 0$. Por ejemplo: 7 + –7 = 0.
- ¿Qué dice la **propiedad conmutativa** del producto? Dice que el orden de los factores no altera la multiplicación, es decir: $a \cdot b = b \cdot a$.
- ¿Qué dice la **propiedad asociativa** del producto? Dice que para tres números reales a, b, y c , se pueden multiplicar primero a y b, y el resultado multiplicarlo por c; o se pueden multiplicar primero b y c, y el resultado multiplicarlo por a, o se pueden multiplicar primero a y c, y el resultado multiplicarlo por b, es decir: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (c \cdot a)$.
- ¿Qué dice la **propiedad distributiva** del producto con respecto a la suma? Dice que para tres números reales a, b, y c, la suma de b y c, multiplicada por a, me dará el mismo resultado que la suma de a por b más a por c, es decir: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

- ¿Qué debe cumplir el **neutro multiplicativo** de un número real? Debe cumplir que al multiplicarlo por cualquier número real, el resultado sea el mismo número. El neutro multiplicativo es el 1, $n \cdot 1 = n$. Ejemplo: $8 \cdot 1 = 8$
- ¿Qué debe cumplir el **inverso multiplicativo** de un número real? Para cada número real su inverso multiplicativo debe cumplir que al multiplicarlo por éste, el resultado sea el neutro aditivo. Para el número real a, existe otro número real $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Por ejemplo: $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$

Actividad 9

A.	$2 - 4 \cdot \lvert 3 - 12 \rvert =$	a) -34	b) 38	c) -36	d) -38
B.	$-6 - 5 \cdot (-3 - 7 \cdot (-2)) =$	a) -49	b) 28	c) -28	d) -61
C.	$-8 \cdot (3 - 9 \cdot \lvert -4 \rvert) + 17 =$	a) -245	b) 281	c) -247	d) 247

Actividad 10

A.

a) $24 \div -8 = -3$
b) $-120 \div 10 = -12$

B.

a) Necesitamos saber cuántos kilómetros recorre el coche en una hora. Debemos dividir $584.3 \div 5.5 = 106.2364$ km/h.
b) Para 150000 kilómetros necesita trabajar $150{,}000 \div 300 = 500$ días. Como trabaja 5 días a la semana, tardará $500 \div 5 = 100$ semanas en llegar a los 150,000 kilómetros.

Actividad 11

A.

a) $\frac{7^5}{7^2}$	0.015625
b) $(2^4)^3$	729
c) $5^2 \cdot 5^3$	-125
d) 4^{-3}	343
e) -5^3	3125
f) $(3^{-3})^{-2}$	4096

B.

a) −64
b) 27
c) 128
d) 6561
e) 0.015625
f) 0.04

Actividad 12

a) $81^{\frac{1}{2}}$	4
b) $8^{\frac{2}{3}}$	no está definida
c) $\sqrt{-5^2}$	−2
d) $\sqrt[5]{-32}$	9
e) $\sqrt[4]{-625}$	0
f) $\sqrt{0}$	5

B.

a) −3
b) 1
c) 11
d) −7
e) 10
f) 2

Actividad 13

A. Encierra en un cuadro rojo todas las que sean fracciones equivalentes de $\frac{7}{9}$:

$\frac{27}{36}$ $\quad \boxed{\frac{49}{63}}$ $\quad \frac{14}{27}$ $\quad \boxed{\frac{-14}{-18}}$ $\quad \frac{-14}{18}$ $\quad \boxed{\frac{350}{450}}$

B. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\frac{-4}{7}+\frac{2}{9}=\frac{-36+14}{63}=\frac{-22}{63}$

b) $\frac{13}{8}\cdot\frac{-6}{7}=\frac{-78}{56}$

c) $4\frac{1}{9}\div\frac{-5}{3}=\frac{37}{9}\div\frac{-5}{3}=\frac{111}{-45}$, que puede ser simplificado a $\frac{37}{-15}$

d) $\frac{-2}{3}+\left(\frac{-5}{2}\right)^3=\frac{-2}{3}+\frac{-125}{8}=\frac{-16-375}{24}=\frac{-391}{24}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\div\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{4}{9}\div\frac{-27}{-8}=\frac{32}{243}$

f) $\left(\frac{-2}{3}+\frac{-5}{2}\right)^3\div 2\frac{3}{5}=\left(\frac{-4-15}{6}\right)^3\div\frac{13}{5}=\left(\frac{-19}{6}\right)^3\div\frac{13}{5}=\frac{-6{,}859}{216}\div\frac{13}{5}=\frac{-34{,}295}{2{,}808}$

C. Resuelve los siguientes problemas:

a) 3 botellas de litro y medio de agua: $3\cdot 1\frac{1}{2}=3\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$; 7 latas de 1/3 de litro de refresco: $7\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$; 2 jarras de 3/4 de litros de limonada: $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$. Consumieron: $\frac{9}{2}+\frac{7}{3}+\frac{6}{4}=\frac{54+28+18}{12}=\frac{100}{12}=8\frac{4}{12}=8\frac{1}{3}$ litros.

b) $450\square\frac{2}{3}=675$ metros.

c) El sábado gastó: $500\cdot\frac{2}{5}=\frac{500\cdot 2}{5}=200$, le quedaron 500 – 200 = 300. El domingo gastó: $300\cdot\frac{3}{4}=\frac{300\cdot 3}{4}=\frac{900}{4}=225$; le sobraron 300 – 225 = 75 pesos.

Actividad 14

Determina la relación de orden que existe entre las siguientes parejas de números y escribe el signo que corresponde:

A. $\frac{2}{3}>\frac{7}{12}$

B. $\frac{11}{9}<\frac{5}{4}$

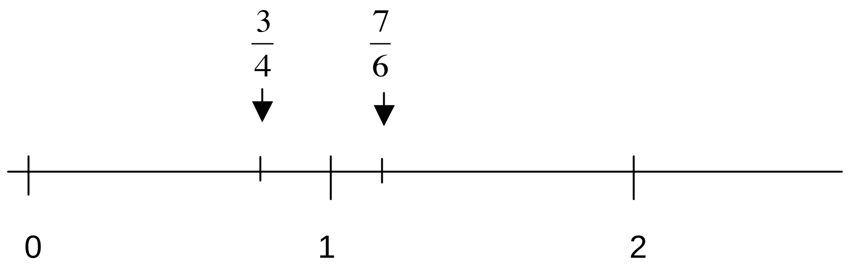
C. $\frac{-2}{7}>\frac{-1}{3}$

D. $\frac{-6}{11}<\frac{-25}{46}$

E. $\frac{-28}{45}=\frac{-84}{135}$

F. $\frac{-2}{5}<\frac{1}{5}$

G.



Por lo tanto, $\frac{3}{4} < \frac{7}{6}$.

Actividad 15

	2	3	4	5	7
60	si	si	si	si	no
490	si	no	no	si	si
125	no	no	no	si	no
210	si	si	no	si	si
49	no	no	no	no	si
100	si	no	si	si	no

Actividad 16

Eratóstenes

Astrónomo, geógrafo, matemático y filósofo griego. Nació en Cirene en el año 284 a.C. Cultivó, además de las ciencias, la poesía, la filología y la filosofía.

Vivió en Atenas hasta que fue llamado a Alejandría para dirigir la biblioteca de esa ciudad. Fue célebre en matemáticas por la **criba** que lleva su nombre, utilizada para hallar los números primos. También inventó el mesolabio, instrumento de cálculo usado para resolver la media proporcional.

Sin embargo, Eratóstenes es particularmente recordado por haber establecido por primera vez la longitud de la circunferencia de la Tierra (252,000 estadios, equivalentes a 40,000 kilómetros) con un error de solo 90 kilómetros respecto a las estimaciones actuales.

También calculó la oblicuidad de la eclíptica a partir de la observación de las diferencias existentes entre las altitudes del Sol durante los solsticios de verano e invierno. Además elaboró el primer mapa del mundo basado en meridianos de longitud y paralelos de latitud.

Al final de su vida, Eratóstenes se quedó ciego, y murió de hambre por su propia voluntad en el año de 194 a.C.

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo que permite encontrar todos los números primos menores que un número natural dado N. Se construye una tabla con todos los números naturales comprendidos entre 2 y N y se van tachando los números que no son primos. Cuando se encuentra un número entero que no ha sido tachado, ese número es declarado primo, y se procede a tachar a todos sus múltiplos. El proceso termina cuando el cuadrado del mayor número confirmado como primo es mayor que N.

Actividad 17

Encuentra la descomposición en factores primos de los siguientes números:

$100 = 2^2 \cdot 5^2$

$350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

$385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$

$2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$

Actividad 18

Encuentra el MCM de los siguientes números:

A. *MCM* (40, 90) = 360
B. *MCM* (15, 18, 24) = 360
C. *MCM* (20, 36, 60) = 180
D. *MCM* (100, 150) = 300

Actividad 19

Encuentra el MCD de los siguientes números:

A. *MCD* (75, 90) = 15
B. *MCD* (30, 36, 48) = 6
C. *MCD* (200, 360) = 40
D. *MCD* (100, 150, 180) = 10

Actividad 20

A. *MCD* (3,150, 5,200, 7,500) = 50, por lo tanto los billetes son de $50.00 que es la mayor denominación posible. En el primer fajo hay 3,150 ÷ 50 = 63 billetes. En el segundo fajo hay 5,200 ÷ 50 = 104 billetes. En el tercer fajo hay 7,500 ÷ 50 = 150 billetes.
B. *MCM* (20, 25, 30) = 300. Cada grupo recibirá 300 plumas. Los estudiantes del grupo A recibirán 300 ÷ 20 = 15 plumas cada uno. Los estudiantes del grupo B recibirán 300 ÷ 25 = 12 plumas cada uno. Los estudiantes del grupo C recibirán 300 ÷ 30 = 10 plumas cada uno.
C. *MCM* (45, 60, 90) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ = 180. Pasarán 180 minutos, de modo que si salieron juntos a las 6:30 de la mañana, volverán a salir juntos a las 9:30 de la mañana.

D. MCD (1,750, 2,500, 2,625) = 125. Cada parcela medirá 125 m^2.

Actividad 21

Encuentra el valor de la incógnita.

A. $x+8=15 \;\rightarrow\; x+8-8=15-8 \;\rightarrow\; x=7$

B. $x-9=-3 \;\rightarrow\; x-9+9=-3+9 \;\rightarrow\; x=6$

C. $x-\frac{7}{4}=-\frac{17}{8} \;\rightarrow\; x-\frac{7}{4}+\frac{7}{4}=-\frac{17}{8}+\frac{7}{4} \;\rightarrow\; x=-\frac{3}{8}$

D. $x-14=17 \;\rightarrow\; x-14+14=17+14 \;\rightarrow\; x=31$

Actividad 22

Encuentra la incógnita utilizando la propiedad de la multiplicación.

A. $5x=15 \;\rightarrow\; \frac{1}{5}\cdot 5x=\frac{1}{5}\cdot 15 \;\rightarrow\; x=3$

B. $\frac{1}{4}x=13 \;\rightarrow\; 4\cdot\frac{1}{4}x=4\cdot 13 \;\rightarrow\; x=52$

C. $\frac{2}{3}x=8 \;\rightarrow\; \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{3}{2}\cdot 8 \;\rightarrow\; x=12$

Actividad 23

Encuentra la incógnita utilizando las propiedades de la potencia y de la raíz.

A. $x^3=216 \;\rightarrow\; \sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{216} \;\rightarrow\; x=6$

B. $\sqrt[4]{x}=5 \;\rightarrow\; (\sqrt[4]{x})^4=5^4 \;\rightarrow\; x=625$

C. $\sqrt[4]{x^2}=2 \;\rightarrow\; \left(\sqrt[4]{x^2}\right)^4=2^4 \;\rightarrow\; x^2=16 \;\rightarrow\; \sqrt{x^2}=\sqrt{16} \;\rightarrow\; x=4.$
Primero elevo a la cuarta de ambos lados, después obtengo raíz cuadrada de ambos lados.

Actividad 24

A. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{63}{81}=\frac{63\div 9}{81\div 9}=\frac{7}{9}$

b) $\frac{180}{240}=\frac{180\div 60}{240\div 60}=\frac{3}{4}$

c) $\frac{300}{75}=\frac{300\div 75}{75\div 75}=\frac{4}{1}=4$

B. Resuelve las siguientes interrogantes.

a) La razón de hombres a mujeres se obtiene al dividir 200 por 180, $\frac{200}{180}$. Recuerda que debemos dar el resultado en su forma simplificada. El $MCD\,(200, 180) = 20$; $\frac{200}{180} = \frac{200 \div 20}{180 \div 20} = \frac{10}{9}$. La razón de mujeres a hombres es: $\frac{180}{200} = \frac{9}{10}$

b) Examen A: $\frac{12}{18}$. Simplificando: $\frac{2}{3}$, Examen B: $\frac{20}{24}$, simplificando: $\frac{5}{6}$, entonces $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$, por lo tanto, obtuvo mayor calificación en el examen B.

Actividad 25

A. $\frac{15}{24} = \frac{180}{x} \rightarrow x \cdot 15 = 24 \cdot 180 \rightarrow x = \frac{24 \cdot 180}{15} \rightarrow x = 288$ kilómetros

B. $\frac{8}{x} = \frac{60}{25} \rightarrow x \cdot 60 = 8 \cdot 25 \rightarrow x = \frac{200}{60} = 3.333$ litros

C. $\frac{2}{5} = \frac{100}{x} \rightarrow x \cdot 2 = 5 \cdot 100 \rightarrow x = \frac{500}{2} = 250$ kilómetros

Actividad 26

A. $\frac{800}{1{,}200} = \frac{x}{100} \rightarrow x \cdot 1{,}200 = 100 \cdot 800 \rightarrow x = \frac{100 \cdot 800}{1200} = \frac{80{,}000}{1200} = 66.6666\%$

B. $\frac{200}{4{,}000} = \frac{x}{100} \rightarrow x \cdot 4{,}000 = 100 \cdot 200 \rightarrow x = \frac{20{,}000}{4{,}000} = 5\ \%$

C. $\frac{x}{1{,}3500} = \frac{107}{100} \rightarrow x \cdot 100 = 107 \cdot 13{,}500 \rightarrow x = \frac{107 \cdot 13{,}500}{100} = 14{,}445$ pesos

D. $\frac{x}{16{,}000} = \frac{85}{100} \rightarrow x \cdot 100 = 1{,}600 \cdot 85 \rightarrow x = \frac{1{,}600 \cdot 85}{100} = 13{,}600$ pesos

Unidad 2

Actividad 2

A.

a) a^3
b) $x^2 + y^2$
c) $(x + y)^2$

d) $\dfrac{\sqrt{n}}{4}$

e) $2\left(\dfrac{a}{b}\right)$

f) $4(m + n + p)$

g) $x^2 + 3x$

h) $6 - y$

B.

a) El producto de tres números
b) Un número más cinco
c) La mitad del producto de dos números
d) Cuatro veces la diferencia de dos números
e) La quinta parte de la raíz cúbica de un número
f) El cuadrado del cociente de dos números
g) El doble de un número menos tres
h) Un número a la cuarta potencia

Actividad 3

Traduce a lenguaje algebraico las siguientes situaciones.

A. La incógnita es la edad de la hija de María, pues sabemos que la edad de María es el triple. Si la edad de la hija de María es x, entonces la edad de María es 3x, como sabemos que ésta es igual a 27 años, el problema queda traducido como: $3x = 27$

B. La incógnita del problema es la medida del lado del cuadrado, x, pues el perímetro es el cuádruple de esta medida: $P = 4x$. Como es igual a 84 cm, el problema queda expresado como: $4x = 84$

C. La incógnita es la cantidad de dinero que tenía, x. La mitad de eso lo gastó en carne: $\frac{x}{2}$. Además gastó 20 en limones y le sobraron 6. Por lo tanto, el problema se expresa como: $x = \frac{x}{2} + 20 + 6$ o $\frac{x}{2} - 20 = 6$

D. La incógnita es el menor de los números, x, pues el mayor es el doble de éste, 2x, y al sumarlos el resultado es 45. Por lo tanto, el problema se expresa como: $x + 2x = 45$

Actividad 4

	coeficiente numérico	parte literal	grado
$9x$	9	x	1
$-3a^3b^4c$	-3	a^3b^4c	8

	coeficiente numérico	parte literal	grado
$\frac{3}{5}xy$	$\frac{3}{5}$	xy	2
$-m^5n$	-1	m^5n	6
4	4	no hay	0

Actividad 5

A.

a) $3m - 5m + m = -m$

b) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{6}x^2 = \frac{19}{12}x^2$

c) $-3ab + 5a^2b - 7ab - 12a^2b = -10ab - 7a^2b$

d) $5a^3 - 3a^2 + 4 - 8a^3 + 10 = -3a^3 - 3a^2 + 14$

e) $3x - 4y + 2z + x - \frac{2}{3}y - 5z = 4x - \frac{14}{3}y - 3z$

B. Para escribir en lenguaje algebraico tres números consecutivos desconocidos, expresamos el primero como x, el siguiente x+1, y el siguiente x+2. Si entre los tres suman 72, la ecuación que representa el problema es: $x + x + 1 + x + 2 = 72$. Reduciendo términos semejantes tenemos: $3x + 3 = 72$

Actividad 6

A. Efectúa las siguientes sumas de polinomios.

a) $7a^3 + 5a^2 - 5a - 12$

b) $9x^2 - 8x + 3y + 3xy$

c) $m^3 + m^2 - 7m - 8$

B. Efectúa las siguientes restas de polinomios.

a) $-3x^3 + 12x^2 - 3x$

b) $10a^2 - 11b$

c) $11x^2 + 2x - 5$

Actividad 7

A. Multiplica los siguientes polinomios.

a) $20x^3y - 35x^2y^3 - 12xy^2 + 21y^4$

b) $-63a^5b - 56a^4b + 35a^3b$

c) $-32ax^5y^3$

d) $6a^5b^2-25a^4b^3-16a^3b^2-9a^3b^4+130a^2b^3-18a^2b-62ab^2+84b$

B. Divide los siguientes polinomios.

a) $a^2 + 3a + 9$

$$\begin{array}{r|l} & a^2 + 3a + 9 \\ \cline{2-2} a-3 & a^3 + 0 + 0 - 27 \\ & \underline{-a^3 + 3a^2} \\ & \quad 3a^2 + 0 \\ & \quad \underline{-3a^2 + 9a} \\ & \qquad 9a - 27 \\ & \qquad \underline{-9a + 27} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

b) $-\dfrac{2x^3}{3y^2z}$

c) $7m^3 - 3n + 4$

d) $4x^2 + 3xy + 7y^2$, con un residuo del $12y^3$

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2 + 3xy + 7y^2 \\ \cline{2-2} 2x-3y & 8x^3 - 6x^2y + 5xy^2 - 9y^3 \\ & \underline{-8x^3 + 12x^2y} \\ & 0 + 6x^2y + 5xy^2 \\ & \quad \underline{-6x^2y + 9xy^2} \\ & \qquad 0 + 14xy^2 - 9y^3 \\ & \qquad\quad \underline{-14xy^2 + 21y^3} \\ & \qquad\qquad 0 + 12y^3 \end{array}$$

Actividad 8

a) $\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{1}{3}x\right)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{9}x$

b) Reducir términos semejantes.

c) $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{9}x=\dfrac{4}{9}x$

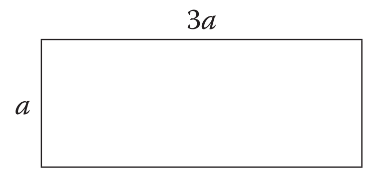
Actividad 9

Resuelve los siguientes problemas:

A. Rogelio tiene 20 años y Silvia tiene 20 + 15 = 35 años.

Procedimieto: Silvia es 15 años mayor que Rogelio. Además, hace cinco años Silvia tenía el doble de edad que Rogelio. Edad de Rogelio: x. Edad de Silvia: $x + 15$. Hace cinco años la edad de Rogelio: $x - 5$. Hace cinco años la edad de Silvia: $x + 15 - 5 = x + 10$. La ecuación: $x + 10 = 2(x - 5) \rightarrow x + 10 = 2x - 10 \rightarrow x - 2x = -10 - 10 \rightarrow -x = -20 \rightarrow x = 20$

B. El área es: (9) (27) = 243 m^2
Procedimiento:



Perímetro (suma de los cuatro lados): $a + 3a + a + 3a$. Cómo sé que el perímetro es igual a 72, igualo, y obtengo la siguiente ecuación: $a + 3a + a + 3a = 72$. Reduciendo términos semejantes: $8a = 72 \rightarrow a = 9$. Por lo tanto el ancho es igual a 9 metros, y el largo es igual a (3)(9) = 27 m.

C. Los números son: 9, 10 y 11.
Procedimiento: Tres números consecutivos: x, $x + 1$, $x + 2$. El doble del mayor: $2(x + 2)$, El triple del menor: $3x$. La ecuación a resolver: $2(x+2) = 3x - 5 \rightarrow 2x + 4 + 4 = 3x - 5 \rightarrow 2x - 3x = -5 - 4 \rightarrow -x = -9 \rightarrow x = 9$

Actividad 10

Margarita abrió una tienda de vestidos. Los tres colores de moda al momento de la apertura eran gris, verde y rosa. Un diseñador de imagen le recomendó que, del total de las prendas que colocará en el aparador, la mitad fueran vestidos de color gris, más dos abrigos grises; de las prendas que quedaran, la mitad fueran vestidos de color verde más dos abrigos de color verde; y que la mitad de las prendas sobrante fueran vestidos de color rosa más dos abrigos de color rosa. Además, deberá colocar un vestido negro, ¿cuántas prendas requirió para el aparador?

Respuesta: Llamemos x al número de prendas. La mitad de éstas más dos serían de color gris, es decir: $\frac{x}{2} + 2$. Le quedaron, la otra mitad de las prendas menos dos: $\frac{x}{2} - 2$. Serían de color verde la mitad de las que le quedaron más 2: $\frac{\frac{x}{2} - 2}{2} + 2$

Ahora le quedaron la otra mitad, menos dos: $\frac{\frac{x}{2} - 2}{2} - 2$. Y serían de color rosa la mitad de éstas más dos: $\frac{\frac{\frac{x}{2} - 2}{2} - 2}{2} + 2$. Además agregaría una prenda negra. Entonces, las prendas grises, más las verdes, más las rosas, más la negra, deben ser igual al total de prendas x.

$\frac{x}{2}+2+\frac{\frac{x}{2}-2}{2}+2+\frac{\frac{\frac{x}{2}-2}{2}-2}{2}+2+1=x$ Despejamos a x. Multiplicamos por 2 de ambos lados, es decir, cada término: $x+4+\frac{x}{2}-2+4+\frac{\frac{x}{2}-2}{2}-2+4+2=2x$. Otra vez multiplicamos por 2 cada término: $2x+8+x-4+8+\frac{x}{2}-2-4+8+4=4x$. De nuevo multiplicamos por 2 cada término: $4x+16+2x-8+16+x-4-8+16+8=8x$.

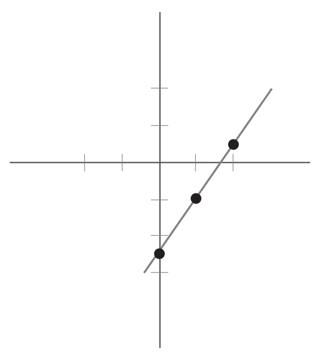
Sumamos $-8x$ a ambos lados de la ecuación: $4x+16+2x-8+16+x-4-8+16+8-8x=8x-8x$. Reducimos términos semejantes: $-x+36=0$. Sumamos x de ambos lados: $36=x$. En el aparador se colocaron 36 prendas.

Actividad 11

Traza en el plano cartesiano las rectas que representan a las siguientes ecuaciones lineales.

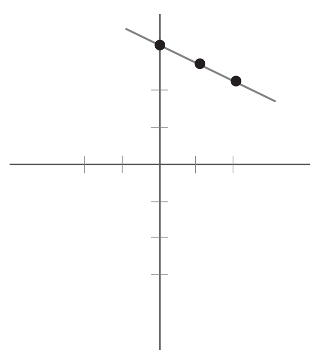
A. $3x-2y=5, \quad y=\frac{5-3x}{-2}$

x	y
0	–2.5
1	–1
2	0.5



B. $x+2=7, y=\frac{7-x}{2}$

x	y
0	3.5
1	3
2	2.5



Actividad 12

A. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$6x - 5y = 28,\ 4x + 9y = -6$

Despejamos x de la segunda ecuación:

$$x = \frac{-6-9y}{4}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$6\ \frac{-6-9y}{4}\ -5y = 28$$

Despejamos a y:

$y = -2$

Sustituimos el valor de y:

$$x = \frac{-6-9(-2)}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

B. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación.

$5x + y = -2,\ \ 2x + 4y = 10$

Despejamos y en ambas:

$$y = -2-5x, \quad y = \frac{10-2x}{4}$$

Igualamos:

$$-2-5x = \frac{10-2x}{4}$$

Despejamos a x:

$x = -1$

Sustituimos en la primera ecuación:

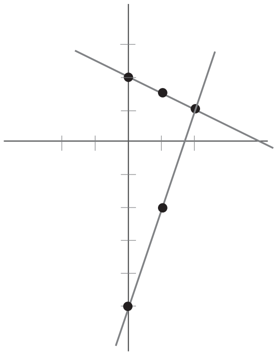
$y = -2 - 5(-1) = 3$

C. Resuelve el siguiente sistema por el método gráfico.

$3x - y = 5,\ \ x + 2y = 4$

x	y
0	–5
1	–2
2	1

x	y
0	2
1	1.5
2	1



Solución: $x = 2,\ y = 1$

D. Resuelve los siguientes problemas por cualquiera de los métodos anteriores.

a) En la tienda de abarrotes, 4 kilogramos de café y 2 kilogramos de azúcar cuestan \$216.00, mientras que 3 kilogramos de café y 7 de azúcar cuestan \$228.00. ¿Cuál es el precio por kilogramo de cada producto?
El precio por kilogramo de café: x, el precio por kilogramo de azúcar: y
El sistema de ecuaciones:

$4x + 2y = 216,\ \ 3x + 7y = 228$

Por igualación:

$$x = \frac{216 - 2y}{4}, \quad x = \frac{228 - 7y}{3}$$

Igualamos:

$$\frac{216 - 2y}{4} = \frac{228 - 7y}{3}$$

Despejamos:

$$3(216 - 2y) = 4(228 - 7y)$$
$$648 - 6y = 912 - 28y$$
$$-6y + 28y = 912 - 648$$
$$22y = 264$$
$$y = 12$$

Sustituimos:

$$x = \frac{216 - 2(12)}{4} = \frac{216 - 24}{4} = \frac{192}{4} = 48$$

El precio por kilogramo de café es de \$48.00 y el precio por kilogramo de azúcar es de \$12.00.

b) La escuela gasta \$12,000.00 en la compra de sillas y escritorios que hacen falta. Si el precio unitario de las sillas es de \$900.00 y el de los escritorios es de \$1,400.00, ¿cuántas sillas y cuántos escritorios se compraron si se compraron 10 cosas?
Número de sillas: s, número de escritorios: e:

$900s + 1{,}400e = 12{,}000$
$x + e = 10$

Por sustitución:
Despejamos a s en la segunda ecuación:

$s = 10 - e$

Sustituimos en la primera ecuación:

$900(10-e)+1{,}400e=12{,}000$

$9000-900e+1{,}400e=12{,}000$

$-900e+1{,}400e=12{,}000-9{,}000$

$500e=3{,}000$

$e=\dfrac{3{,}000}{500}=6$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$s = 10 - 6$
$s = 4$

Por lo tanto, se compraron 6 escritorios y 4 sillas.

Actividad 13

A. $ax - bx = x(a - b)$
B. $9ax + 81b + 18c = 9(ax + 9b + 2c)$
C. $45m^3n - 35m^2 - 15m^4n^2 = 5m^2(9mn - 7 - 3m^2n^2)$
D. $54x^4 + 36x^3 - 72x^2 = 18x^2(3x^2 + 2x - 4)$
E. $5x^3y^2 - 3x^2y^4 + 7xy^3z = xy^2(5x^2 - 3xy^2 + 7yz)$

Actividad 14

A. $4x^2 + 8x + 1 = (2x + 1)^2$
B. $25c^2 - 4 = (5c + 2)(5c - 2)$
C. $121y^2 + 22yz + z^2 = (11y + z)^2$
D. $1 - 36t^2 = (1 - 6t)(1 + 6t)$
E. $49a^4 - 42a^2b + 9b^2 = (7a^2 - 3b)^2$
F. $81x^4 - 49y^2 = (9x^2 - 7y)(9x^2 + 7y)$

Actividad 15

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:
A. $x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7)$
B. $x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$
C. $x^2 + 5x - 24 = (x - 3)(x + 8)$
D. $x^2 - 5x - 36 = (x - 9)(x + 4)$
E. $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$

Actividad 16

A. $4x^2+15x+9=4x^2+12x+3x+9=4x(x+3)+3(x+3)=(x+3)(4x+3)$

B. $3x^2 - 13x - 30 = 3x^2 - 18x + 5x - 30 = 3x(x-6) + 5(x-6) = (x-6)(3x+5)$

C. $6x^2 + 7x - 5 = 6x^2 - 3x + 10x - 5 = 3x(2x-1) + 5(2x-1) = (2x-1)(3x+5)$

D. $8x^2 - 14x - 15 = 8x^2 + 6x - 20x - 15 = 2x(4x+3) - 5(4x+3) = (4x+3)(2x-5)$

Actividad 17

Factoriza las siguiente expresiones algebraicas.

A. $4x^2 + 24xy + 36y^2 = (2x+6y)^2$

B. $25x^2 - 100 = (5x+10)(5x-10)$

C. $x^2 - 3x - 70 = (x-10)(x+7)$

D. $6x^2 + 13x + 6 = 6x^2 + 9x + 4x + 6 = 3x(2x+3) + 2(2x+3) = (2x+3)(3x+2)$

E. $4x^2y + 12xy^3 - 8x^3y^2 = 4xy(x + 3y - 2x^2y)$

Actividad 18

A. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de factorización.

a) $x^2 + 3x = 18$

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x-3)(x+6) = 0$

Si $x - 3 = 0,\quad x = 3$

Si $x + 6 = 0,\quad x = -6$

b) $4x^2 - 9 = 0$

$(2x-3)(2x+3) = 0$

Si $2x - 3 = 0,\quad x = \frac{3}{2}$

Si $2x + 3 = 0,\quad x = \frac{-3}{2}$

c) $x^2 - 12x = -36$

$(x-6)^2 = 0$

$x - 6 = 0$

$x = 6$

d) $5x^2 + 6x + 1 = 0$

$5x^2 + 5x + x + 1 = 0$

$5x(x+1) + 1(x+1) = 0$

$$(x+1)(5x+1)=0$$

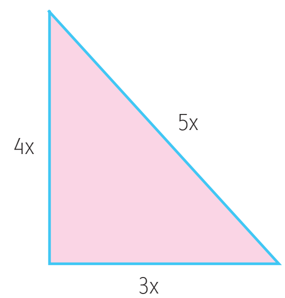
Si $\quad x+1=0, \quad x=-1$

Si $\quad 5x+1=0, \quad x=\dfrac{-1}{5}$

B. Resuelve los siguientes problemas utilizando el método de factorización:

a) Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Encuentra la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2.

Como los lados son proporcionales a 3, 4 y 5, sus longitudes son múltiplos de éstos tres números en la misma proporción, es decir, 3x, 4x, y 5x, para un cierto número x.



Si su área es 24 entonces:

$$\frac{4x\cdot 3x}{2}=24$$

$$\frac{12x^2}{2}=24$$

$$6x^2=24$$

$$x^2=4$$

$$x^2-4=0$$

Es una diferencia de cuadrados, por lo tanto,

$$(x+2)(x-2)=0$$

$$x=-2, \quad x=2$$

Tomo el valor positivo, entonces, las dimensiones del triángulo son: 6, 8, y 10.

b) Dentro de 11 años la edad de Hugo será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Hugo.

Si x es la edad de Hugo, dentro de 11 años la edad de Hugo será $x + 11$, y hace 13 años Hugo tenía $x - 13$ años.

$$x+11=\frac{(x-13)^2}{2}$$
$$2x+22=x^2-26x+169$$
$$x^2-26x-2x+169-22=0$$
$$x^2-28x+147=0$$
$$(x-21)(x-7)=0$$
$$x=21$$
$$x=7$$

La respuesta es $x = 21$, pues si Hugo tuviera 7 no podría restarle 13. Hugo tiene 21 años.

Actividad 19

A. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por la fórmula general:

a) $2x^2-9x=5$

$$2x^2-9x-5=0$$
$$a=2,\quad b=-9,\quad c=-5$$
$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{-9^2-4(2\cdot-5)}}{2\cdot 2}$$
$$x=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{4}$$
$$x=\frac{9\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{9\pm 11}{4}$$
$$x=\frac{20}{4}=5$$
$$x=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

b) $x^2+5x=14$

$$x^2+5x-14=0$$
$$a=1,\quad b=5,\quad c=-14$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(-14)}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 9}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = \frac{-14}{2} = -7$$

c) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

$a = 3, \quad b = 5, \quad c = 2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3 \cdot 2)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{6}$$

$$x = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x = \frac{-5+1}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

B. Resuelve los siguientes problemas por la fórmula general.

a) Si a un lado de un cuadrado se le alarga 2 m y al contiguo 7 m, obtenemos un rectángulo cuya área es 22 m^2 más que el doble de la del cuadrado. Calcular las dimensiones del cuadrado.

$(x+2)(x+7) = 2x^2 + 22$

$x^2 + 9x + 14 = 2x^2 + 22$

$2x^2 - x^2 - 9x - 14 + 22 = 0$

$x^2 - 9x + 8 = 0$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{-9^2 - 4 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2}$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{49}}{2}$$

$$x=\frac{9\pm 7}{2}$$

$$x=\frac{16}{2}=8,\quad x=\frac{2}{2}=1$$

Ambos valores de x cumplen para este problema.

b) La suma de dos números es 5 y su producto es −84.
Entonces tenemos el siguiente sistema:

$$x + y = 5$$
$$xy = -84$$

Despejamos de la primera ecuación:

$$y = 5 - x$$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$x(5-x)=-84$$

$$5x-x^2=-84$$

$$x^2=-5x-84$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{5^2-4(1\cdot -84)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+336}}{2}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{361}}{2}$$

$$x=\frac{5\pm 19}{2}$$

$$x=\frac{24}{2}=12,\quad x=\frac{-14}{2}=-7$$

Los números son 12 y − 7.

Actividad 20

A. Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de completar el trinomio cuadrado perfecto:

a) $9x^2-18x+5=0$

$$9x^2-18x=-5$$

$$\frac{9x^2}{9}-\frac{18x}{9}=\frac{-5}{9}$$

$$x^2-2x=\frac{-5}{9}$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{-2}{2}\right)^2=1$$

$$x^2-2x+1=\frac{-5}{9}+1$$

$$(x-1)^2=\frac{4}{9}$$

$$\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$x-1=\pm\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{5}{3},\quad x=\frac{1}{3}$$

b) $x^2+6x-7=0$

$$x^2+6x=7$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$$

$$x^2+6x+9=7+9$$

$$(x+3)^2=16$$

$$\sqrt{(x+3)^2}=\sqrt{16}$$

$$x+3=\pm 4$$

$$x=4-3=1,\quad x=-4-3=-7$$

c) $3x^2-24x+45=0$

$$3x^2-24x=-45$$

$$x^2-8x=-15$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{-8}{2}\right)^2=-4^2=16$$

$$x^2-8x+16=-15+16$$

$$(x-4)^2=1$$

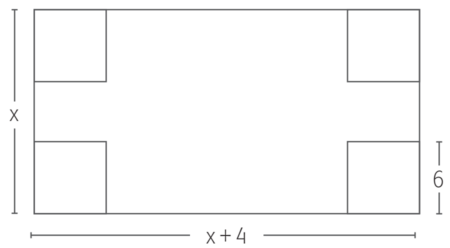
$$\sqrt{(x-4)^2}=\sqrt{1}$$

$$x-4=\pm 1$$

$$x=1+4=5,\quad x=-1+4=3$$

B. Resuelve el siguiente problema por el método de completar cuadrado:
Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm³ cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Encuentra las dimensiones de la caja.

Sea x el ancho de la pieza. El volumen se obtiene multiplicando largo por ancho por alto.



$$6(x-12)(x+4-12)=840$$
$$6(x-12)(x-8)=840$$

Dividimos entre 6 de ambos lados de la ecuación:

$$(x-12)(x-8)=140$$
$$x^2-20x+96=140$$
$$x^2-20x=44$$

Completamos el cuadrado del lado izquierdo:

$$x^2-20x+100=44+100$$
$$(x-10)^2=144$$

Sacamos raíz de ambos lados:

$$(x-10)=\pm 12$$
$$x=\pm 12+10$$
$$x=22, \quad x=-2$$

Tomamos el valor positivo, por lo tanto, $x = 22$. Las dimensiones de la caja son: 6, $x - 12 = 10$, y $x - 8 = 14$, es decir: 6, 10, y 14. Si con estos datos obtenemos el volumen podremos comprobar los resultados: $6 \cdot 10 \cdot 14 = 840$ cm³, es correcto.

¿Ya estoy preparado(a)?

Problema 1

I. (c) 6.4

Solución al problema:

El largo de la pared: $2a$

El perímetro de la pared: $2a + a + 2a + a = 24$

Reducimos términos semejantes: $6a = 24$, $a = 4$

El ancho de la pared mide 4 m, el largo mide $2 \cdot 4 = 8$ m

El área de la pared: $4 \cdot 8 = 32$ m^2

Aplicamos proporcionalidad:

$$\frac{5}{32} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{32}{5} = 6.4 \text{ litros de pintura}$$

II. a) $6a = 24$

Solución al problema:

Con la fórmula del perímetro obtengo la siguiente igualdad: $2a + a + 2a + a = 24$, reducimos términos semejantes: $6a = 24$.

III. $\frac{5}{32} = \frac{1}{x}$

Problema 2

I. a) 30 de arábigo y 20 de robusto

Solución al problema:

50 kilogramos de la mezcla costarán: $12 \cdot 50 = 600$ pesos.

Kilogramos de arábico: x, kilogramos de robusto: y

El sistema de ecuaciones:

$$x + y = 50$$
$$10x + 15y = 600$$

Por sustitución:

$$x = 50 - y$$
$$10(50 - y) + 15y = 600$$
$$500 - 10y + 15y = 600$$
$$-10y + 15y = 600 - 500$$
$$5y = 100$$
$$y = 20$$
$$x = 50 - y = 50 - 20 = 30$$

Por lo tanto deberán mezclarse 30 kilogramos de arábico y 20 kilogramos de robusto.

II. d) Cantidad en kilogramos de arábico y de robusto que llevará la mezcla.

III. c) Propiedad de la resta (al restar 15*y*) y de la división (al dividir entre 5)

Problema 3

I. d) $6\frac{3}{5}$

Solución al problema:

Lo que pinta Jaime en una hora: $7\frac{3}{4}$. Lo que pinta Francisco en una hora: x

El doble de lo que pinta Jaime en una hora más lo que pinta Francisco en una hora es igual a: $28\frac{7}{10}$

La ecuación:

$$2\left(7\frac{3}{4}+x\right)=28\frac{7}{10}$$

$$2\left(\frac{31}{4}+x\right)=\frac{287}{10}$$

$$\frac{62}{4}+2x=\frac{287}{10}$$

$$2x=\frac{287}{10}-\frac{62}{4}$$

$$2x=\frac{132}{10}$$

$$x=\frac{132}{20}=\frac{33}{5}=6\frac{3}{5}$$

II. a)

III. b)

Problema 4

I. c) 640 y 800

Solución al problema:

Buscamos una fracción equivalente a $\frac{4}{5}$, es decir, una fracción de la forma: $\frac{4n}{5n}$, en la que $4n$ es el número de niñas y $5n$ es el número de niños y como en la escuela hay un total de 1440 alumnos, entonces, el número de niñas más el número de niños debe ser igual a 1440:

$$4n+5n=1440$$

$$9n=1440$$

$$n \quad \frac{1,440}{9} = 160 \quad =$$

Por lo tanto, el número de niñas es 4 · 160= 640, y el número de niños es 5 · 160 = 800.

II. d)

Problema 5

I. a) 19 garrafones de 60 litros

Solución al problema:

$$MCD(240, 360, 540) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ litros}$$

Para el agua del primer tanque se requieren 240 ÷ 60 = 4 garrafones, para el segundo se requieren 360 ÷ 60 = 6 garrafones, y para el tercer tanque se requieren 540 ÷ 60 = 9 garrafones. En total se requieren 19 garrafones.

Problema 6

I. b) 437,000

Solución al problema:

$$\frac{x}{380,000} = \frac{115}{100}$$

$$x = \frac{115 \cdot 380,000}{100}$$

$$x = 437,000$$

II. c)

III. a)

Problema 7

I. d) 35 motocicletas y 85 automóviles

Solución al problema:

Número de motocicletas: x, número de automóviles: y

$$x + y = 120$$

$$2x + 4y = 410$$

Por igualación:

$$y = 120 - x$$

$$y = \frac{410 - 2x}{4}$$

$$120 - x = \frac{410 - 2x}{4}$$

$$4(120-x)=410-2x$$
$$480-4x=410-2x$$
$$-4x+2x=410-480$$
$$-2x=-70$$
$$x=35$$
$$y=120-35=85$$

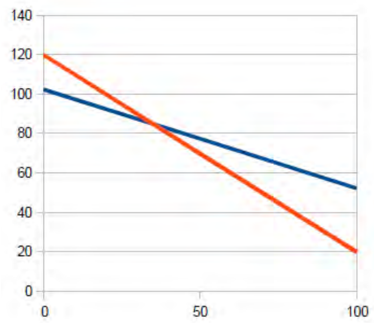
35 motocicletas, 85 automóviles

II. c) La cantidad de motocicletas y la cantidad de automóviles

III. a) No pertenece: $2x + y = 120$

IV. b)

La representación gráfica del problema anterior es:



Problema 8

I. c) 16 y 48

Solución al problema:
El menor: x, el mayor: y

$$x+y=64$$
$$y=64-x$$
$$\frac{x}{2}=\frac{y}{6}$$

Por sustitución:

$$\frac{x}{2}=\frac{64-x}{6}$$
$$6x=2(64-x)$$
$$6x=128-2x$$

$$8x = 128$$

$$x = \frac{128}{8} = 16$$

$$y = 64 - 16 = 48$$

II. d) $\frac{x}{2} = \frac{y}{6}$

III. c) Completar cuadrado perfecto

Problema 9

I. d) 8 y 12

Solución al problema:

Felipe tiene m monedas, Marco tiene n monedas

$$m + 2 = n - 2$$

$$n + 4 = 4(m - 4)$$

Por sustitución, despejamos n de la primera ecuación:

$$n = m + 2 + 2$$

$$n = m + 4$$

$$m + 4 + 4 = 4(m - 4)$$

$$m + 8 = 4m - 16$$

$$m - 4m = -16 - 8$$

$$-3m = -24$$

$$m = \frac{24}{3} = 8$$

$$n = m + 4 = 8 + 4 = 12$$

8 monedas tiene Felipe, 12 monedas tiene Marco.

II. a) $m + 2 = n - 2$

$n + 4 = 4(m - 4)$

Problema 10

I. b) 14 chocolates

Solución al problema:

Si x es el número de chocolates que compraron:

$$x = \frac{x}{2} + 1 + \frac{\frac{x}{2} - 1}{2} + 1 + \frac{\frac{\frac{x}{2} - 1}{2} - 1}{2} + 1$$

Multiplicamos por 2: $2x = x + 2 + \frac{x}{2} - 1 + 2 + \frac{\frac{x}{2} - 1}{2} - 1 + 2$

Multiplicamos por 2: $4x = 2x + 4 + x - 2 + 4 + \frac{x}{2} - 1 + 2 + 4$

Multiplicamos por 2: $8x = 4x + 8 + 2x - 4 + 8 + x - 2 - 4 + 8$
Reducimos términos semejantes: $8x - 4x - 2x - x = 8 - 4 + 8 - 2 - 4 + 8$

$$x = 14$$

II. d)

Problema 11

I. a) 12%
Solución al problema:
9,765,400, 10,937,248

$$\frac{10,937,248}{9,765,400} = \frac{x}{100}$$

$x = 112$

II. b)

Por lo tanto, los ingresos, en porcentaje, se incrementaron de 100% a 112%, o sea, 12%.

Problema 12

I. c) 40

Llevaba x huevos, entonces: $x - \frac{2}{5}x + 21 = x + \frac{1}{8}x$

$$21 = x + \frac{1}{8}x - x + \frac{2}{5}x$$

$$21 = \frac{21}{40}x$$

$x = 40$

Reducimos términos semejantes:

II. c) $x - \frac{2}{5}x$

III. a) $x - \frac{2}{5}x + 21$

Problema 13

I. d) 15 y 17

Solución al problema:

$$a+b=32$$
$$ab=255$$
$$b=32-a$$
$$a(32-a)=255$$
$$32a-a^2=255$$
$$a^2-32a+255=0$$

Por fórmula general:

$$a=\frac{-(-32)\pm\sqrt{(-32)^2-4(1)(255)}}{2(1)}$$
$$a=\frac{+32\pm\sqrt{(1024)-1020}}{2}$$
$$a=\frac{+32\pm 2}{2}$$
$$a=\frac{34}{2}=17,\quad a=\frac{30}{2}=15$$

En este problema, cualquiera de los resultados es válido para a. Si elijo a = 17, entonces, al despejar de $b = 32 - a$, encuentro que b = 15. Análogamente, si elijo a = 15, al despejar de $b = 32 - a$, encuentro que b = 17.

II. b) Segundo.

Problema 14

I. a) 7 y 8

Solución al problema:
Las edades de los hijos de Mariana son números consecutivos: n, $n + 1$.

$$(n)(n+1)=56$$
$$n^2+n-56=0$$

Por factorización:

$$(n+8)(n-7)=0$$
$$n+8=0$$
$$n=-8$$
$$n-7=0$$
$$n=7$$

n debe ser positivo, pues representa una edad, por lo tanto, la solución válida es: $n = 7$, $n + 1 = 8$

II. c) -8 y 7

Problema 15

I. b) 34

Solución al problema:

$$h = 3b + 4$$

$$\frac{bh}{2} = 170$$

$$\frac{b(3b+4)}{2} = 170$$

$$b(3b+4) = 340$$

$$3b^2 + 4b = 340$$

$$3b^2 + 4b - 340 = 0$$

Por fórmula general:

$$b = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(-340)}}{2(3)}$$

$$b = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4080}}{6}$$

$$b = \frac{-4 \pm \sqrt{4096}}{6}$$

$$b = \frac{-4 \pm 64}{6}$$

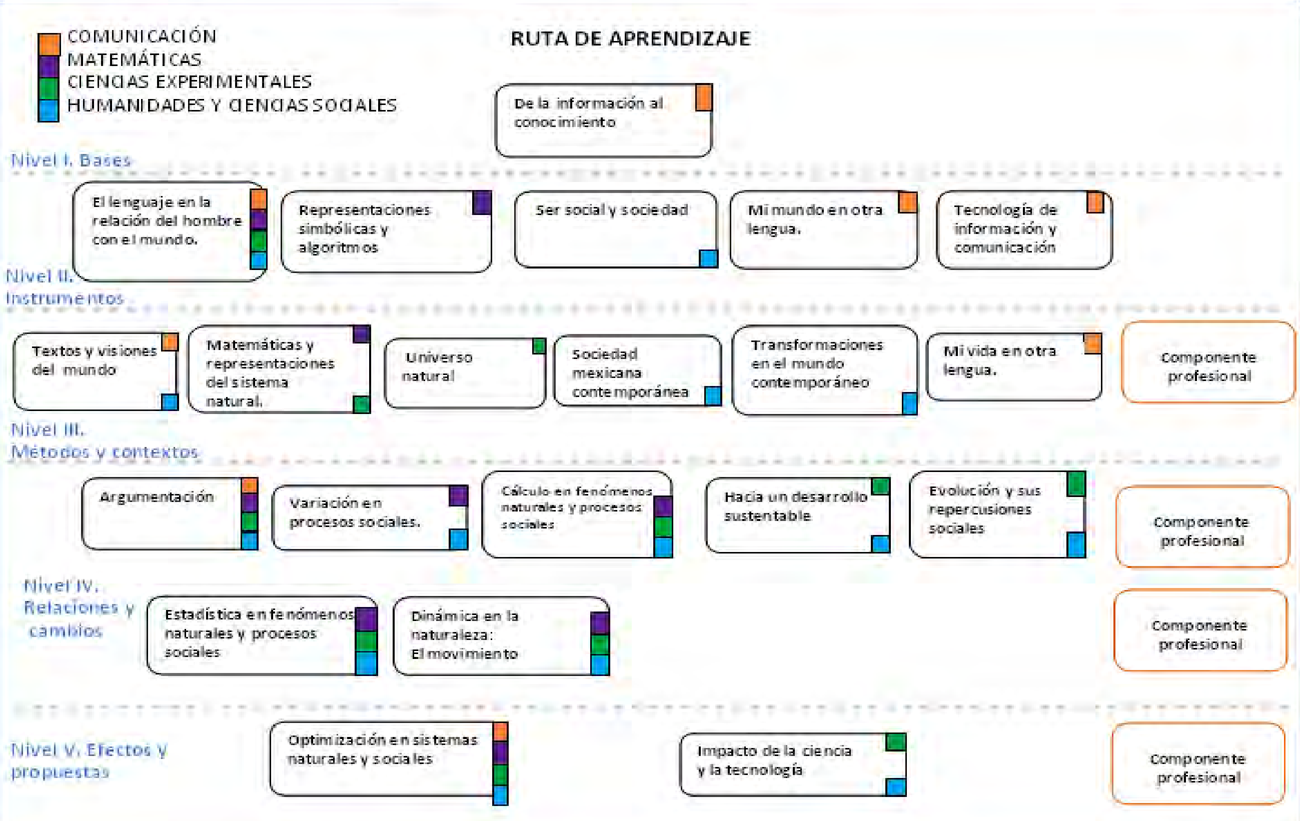
$$b = \frac{60}{6} = 10, \quad b = \frac{-68}{6} = \frac{-34}{3}$$

La medida de la base debe ser positiva pues es una distancia, por lo tanto:

II. c) Trinomio

III. c) $b^2 + 340b - 4 = 0$

Apéndice 2


COMUNICACIÓN
MATEMÁTICAS
CIENCIAS EXPERIMENTALES
HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES
RUTA DE APRENDIZAJE
De la información al conocimiento
Nivel I. Bases
El lenguaje en la relación del hombre con el mundo.
Representaciones simbólicas y algoritmos
Ser social y sociedad
Mi mundo en otra lengua.
Tecnología de información y comunicación
Nivel II. Instrumentos
Textos y visiones del mundo
Matemáticas y representaciones del sistema natural.
Universo natural
Sociedad mexicana contemporánea
Transformaciones en el mundo contemporáneo
Mi vida en otra lengua.
Componente profesional
Nivel III. Métodos y contextos
Argumentación
Variación en procesos sociales.
Cálculo en fenómenos naturales y procesos sociales
Hacia un desarrollo sustentable
Evolución y sus repercusiones sociales
Componente profesional
Nivel IV. Relaciones y cambios
Estadística en fenómenos naturales y procesos sociales
Dinámica en la naturaleza: El movimiento
Componente profesional
Nivel V. Efectos y propuestas
Optimización en sistemas naturales y sociales
Impacto de la ciencia y la tecnología
Componente profesional

Fuentes recomendadas

Fuentes impresas y electrónicas recomendadas

▣ Números reales:

Baldor, A. (1974). *Aritmética teórico práctica; con 7008 ejercicios y problemas*. Bogota: Cultural colombiana.

Cuéllar, J. A. (2004). Álgebra. México: Mc Graw Hill.

Fuenlabrada de la Vega, S. (1994). *Matemáticas I: aritmética y álgebra*. México: McGraw-Hill.

Miller, C. D. y H. Vern (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.

Ortíz, F. (2004). *Matemáticas.* México: Publicaciones Cultural.

http://es.scribd.com/doc/3575583/CLASIFICACION-Y-PROPIEDADES-DE-LOS-NUMEROS-REALES

http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/numeros-irracionales.html

▣ Potencias y raíces:

Cuéllar, J. A. (2004). *Álgebra*. México: Mc Graw Hill.

Miller, C. D. y H. Vern (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.

Núñez, R. (2007). *Potencias y raíces*. Jaén: Íttakus/Publicatuslibros.com. <http://www.publicatuslibros.com/>

Ortíz, F. (2004). *Matemáticas*. México: Publicaciones Cultural.

http://www.escolar.com/matem/25potenc.htm

http://yachay.stormpages.com/04ent/e4p.htm

http://www.escolares.net/matematicas/propiedades-de-las-potencias/

▣ Operaciones con fracciones:

Baldor, A. *Aritmetica teórico práctica; con 7008 ejercicios y problemas*, Bogota: Cultural colombiana, 1974.

Cuéllar, J. A. (2004). *Álgebra*. México: Mc Graw Hill.

Fuenlabrada de la Vega, S. (1994). *Matemáticas I: aritmética y álgebra*. México: McGraw-Hill.

Miller, C. D. y H. Vern (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.

http://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/operaciones_con_fracc.pdf

http://www.vitutor.net/2/3/4.html

http://www.cuaed.unam.mx/matematicas/index.html

▣ Divisibilidad:

Baldor, A. (1974). *Aritmética teórico práctica; con 7008 ejercicios y problemas*. Bogota: Cultural colombiana.

Cuéllar, J. A. (2004). *Álgebra*. México: Mc Graw Hill.

Fuenlabrada de la Vega, S. (1994). *Matemáticas I: aritmética y álgebra*. México: McGraw-Hill.

Miller, C. D. y H. Vern (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.

http://www.omerique.net/twiki/pub/Recursos/MatematicasNivelCIesGuadalpena/multiplosydivisores.pdf

http://www.ditutor.com/divisibilidad/divisibilidad.html

- Razones y proporciones:

Baldor, A. (1974). *Aritmética teórico práctica; con 7008 ejercicios y problemas*. Bogota: Cultural colombiana.

Cuéllar, J. A. (2004). *Álgebra*. México: Mc Graw Hill.

Fuenlabrada de la Vega, S. (1994). *Matemáticas I: aritmética y álgebra*. México: McGraw-Hill.

Miller, C. D. y H. Vern (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.

http://web.ing.puc.cl/~milopez/preuing/algebra/ag5.pdf

http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/porcentajes.html

http://www.preparatoriaabierta.com.mx/matematicas-1/razones.php

- Lenguaje algebraico:

Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.

Cuéllar, J. A. (2004). *Álgebra*. México: Mc Graw Hill.

http://mail.udgvirtual.udg.mx/biblioteca/bitstream/123456789/1875/1/Lenguaje_algebraico.pdf.

http://docente.ucol.mx/grios/algebra/lenguajealgebraico.htm

http://www.comesed.com/Sb/sbt92.htm

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Algebra1ReducirTermSemej.htm

http://www.sectormatematica.cl/media/NM1/NM1_algebra%20.doc

http://azul2.bnct.ipn.mx/algebra/polinomios.PDF

http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas25.htm

http://yachay.stormpages.com/07_4div/div3.htm

http://www.cuaad.udg.mx/algebra/Algebra%20IA/nroc%20prototype%20files/coursestart.html

- Ecuaciones lineales:

Cuéllar, J. A. (2004). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.

Miller, C. D. y H. Vern (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.

Ortíz, F. (2004). *Matemáticas*. México: Publicaciones Cultural.

Swokowski, E. W. y J. A. Cole. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Resolucion_geometrica_ecuaciones/ecuacion.htm
http://www.vadenumeros.es/tercero/problemas-primer-grado.htm
http://www.conevyt.org.mx/cursos/enciclope/algebra.html
http://www.cuaad.udg.mx/algebra/Algebra%20IA/nroc%20prototype%20files/coursestart.html

▣ Sistemas de ecuaciones:

Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.
Cuéllar, J. A. (2004). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.
Miller, C. D. y H. Vern. (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.
Ortíz, F. (2004). *Matemáticas*. México: Publicaciones Cultural.
http://www.math.com.mx/docs/sec/sec_0014_Sistemas_Lineales.pdf
http://www.vadenumeros.es/tercero/sistemas-de-ecuaciones.htm
http://carmesimatematic.webcindario.com/sistemas.htm
http://platea.pntic.mec.es/jescuder/algebra1.htm
http://www.cuaad.udg.mx/algebra/Algebra%20IA/nroc%20prototype%20files/coursestart.html

▣ Ecuaciones cuadráticas:

Cuéllar, J. A. (2004). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.
Miller, C. D. y H. Vern. (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.
Ortíz, F. (2004). *Matemáticas*. México: Publicaciones Cultural.
Sullivan, M. (1997). *Precálculo*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
Swokowski, E. W. y J. A. Cole. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning.
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/ecuacion.htm#4
http://www.vitutor.com/ecuaciones/2/p_e.html

Fuentes consultadas

Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.

Baldor, A. (1974). *Aritmética teórico práctica; con 7008 ejercicios y problemas*. Bogota: Cultural colombiana.

Cuéllar, J. A. (2004). *Álgebra*. México: Mc Graw Hill.

Fuenlabrada de la Vega, S. (1994). *Matemáticas I: aritmética y álgebra*. México: McGraw-Hill.

Miller, C. D. y H. Vern (1999). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.

Ortíz, F. (2004). *Matemáticas*. México: Publicaciones Cultural.

Swokowski, E. W., y J. A. Cole. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning.

Sullivan, M. (1997). *Precálculo*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/numeros-irracionales.html

http://es.scribd.com/doc/3575583/CLASIFICACION-Y-PROPIEDADES-DE-LOS-NUMEROS-REALES

http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol1/vol1n2p59-81.pdf

http://www.vitutor.com/geo/eso/ac_e.html

http://www.math.com.mx/docs/sec/sec_0002_Problemas_Suma_Numeros.pdf

http://www.geothesis.com/index.php?option=com_content&view=article&id=807:problemas-propuestos-numeros-enteros&catid=64:tema-3-numeros-enteros&Itemid=140

Núñez, R. (2007). Potencias y raíces. [en línea] Jaén: Íttakus/Publicatuslibros.com. <http://www.publicatuslibros.com/>

http://www.escolar.com/matem/25potenc.htm

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/potencia_eda05/problemas.htm

http://yachay.stormpages.com/04ent/e4p.htm

http://www.escolares.net/matematicas/propiedades-de-las-potencias/

http://www.ejemplode.com/5-matematicas/415-ejemplo_de_exponentes_pares.html

http://www.cuaed.unam.mx/matematicas/index.html

http://www.sectormatematica.cl/basica/santillana/operaciones_con_fracc.pdf

http://www.vitutor.net/2/3/4.html

http://www.omerique.net/twiki/pub/Recursos/MatematicasNivelCIesGuadalpena/multiplosydivisores.pdf

http://www.ditutor.com/divisibilidad/divisibilidad.html

http://web.ing.puc.cl/~milopez/preuing/algebra/ag5.pdf

http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/porcentajes.html

http://www.preparatoriaabierta.com.mx/matematicas-1/razones.php

http://mail.udgvirtual.udg.mx/biblioteca/bitstream/123456789/1875/1/Lenguaje_algebraico.pdf.

http://docente.ucol.mx/grios/algebra/lenguajealgebraico.htm

http://www.comesed.com/Sb/sbt92.htm

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Algebra1ReducirTermSemej.htm

http://www.sectormatematica.cl/media/NM1/NM1_algebra%20.doc

http://azul2.bnct.ipn.mx/algebra/polinomios.PDF

http://www.cuaad.udg.mx/algebra/Algebra%20IA/nroc%20prototype%20files/coursestart.html
http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas25.htm
http://yachay.stormpages.com/07_4div/div3.htm
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Resolucion_geometrica_ecuaciones/ecuacion.htm
http://www.vadenumeros.es/tercero/problemas-primer-grado.htm
http://www.conevyt.org.mx/cursos/enciclope/algebra.html
http://www.math.com.mx/docs/sec/sec_0014_Sistemas_Lineales.pdf
http://www.vadenumeros.es/tercero/sistemas-de-ecuaciones.htm
http://carmesimatematic.webcindario.com/sistemas.htm
http://platea.pntic.mec.es/jescuder/algebra1.htm
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Problemas/09-02-p-SisEcuProblemas.html
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/sist_ecu_jacm/sist_ecuac.htm
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/ecuacion.htm#4
http://www.vitutor.com/ecuaciones/2/p_e.html
http://www.vadenumeros.es/tercero/problemas-segundo-grado.htm

Impreso y encuadernado
en TERCERA EDICIÓN, S.A.DE C.V.

América 17 C.P. 53300
Naucalpan, Estado de México